Mathématiques générales

Examen (24 septembre 2010)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez, sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, toutes les solutions complexes de l'équation $x^3 + 1 = 0$. $/2$

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que, pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^3$, /4

$$\dim V = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim f(V) = 2.$$

Montrer que f est bijective.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \max\{x, 1-x\}$. $/6$

(a) Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f([1,+\infty[)$, $f(]1,+\infty[)$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$ arbitraire, déterminer $f^{-1}(]x,+\infty[)$.

(c) Donner un exemple de deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tel que

$$\varnothing = f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Soit X un ensemble non vide et $a \in X$. On considère $\mathscr{F} = \{F \subseteq X \mid F \ni a\}$. $/3$

(a) Prouvez que, pour tout $F \subseteq X$, $a \in F \Leftrightarrow \{a\} \subseteq F$.

(b) Prouvez que si $Y \subseteq X$, alors on a que Y ou $\complement Y$ appartient à $\mathscr{F}$.

Mathématiques générales

Examen (24 septembre 2010)

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/4

Question 5. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $B \subseteq F$.

(a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(b) Donner un exemple où $f(f^{-1}(B)) \neq B$.

(c) Écrivez $f(f^{-1}(B))$ sous la forme d'une formule dans laquelle n'apparaissent que E, F, B, f, $\cap$, $\cup$ et des parenthèses (chaque symbole peut être utilisé le nombre de fois que vous désirez — y compris pas du tout). Prouvez votre formule.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 6. Soit $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrez que $q + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$, sachant que $\sqrt{2}$ est irrationnel. $/1$

Question 7. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous : $/5$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Prouvez que, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f n'est pas continue en x_0.

(b) Déterminez le domaine de dérivabilité de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x \cdot f(x)$. Veillez à la qualité de vos justifications.

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

/4

Question 8. Calculer l'infimum et le supremum des ensembles suivants :

- $A := \left\{ \frac{2n+1}{5n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$,
- $B := \{(-3)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- $C := \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

Justifiez vos réponses.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 9. Soit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto 2y^n$, où n est un entier naturel. Calculer : $/4$

(a) $\lim_{y\to 1, y<1} \lim_{n\to\infty} g_n(y)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \lim_{y\to 1, y<1} g_n(y)$.

Mathématiques générales

Examen (24 septembre 2010)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 10. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $U(n)$ l'ensemble des racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^n - 1$. $/5$

- Montrer que $U(n)$ est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Montrer que $U(n) \cap U(m) = U\big(\mathrm{pgcd}(n,m)\big)$.