Mathématiques générales

Examen (24 septembre 2010) **Correction**

Question 1. *Donnez, sous la forme $a+b\boldsymbol{i}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, toutes les solutions complexes de l'équation $x^3+1=0$.*

Soit $x \in \mathbb{C}$, sa forme trigonométrique est donnée par $\rho \cdot \operatorname{cis}(\theta)$ où $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0,2\pi[$. On peut donc récrire l'équation $x^3=-1$ sous sa forme trigonométrique, on obtient alors l'équation suivante :

$$\big(\rho \cdot \operatorname{cis}(\theta)\big)^3 = 1 \cdot \operatorname{cis}(\pi).$$

La formule de de Moivre nous assure que cette équation est équivalente à l'équation ci-dessous :

$$\rho^3 \cdot \operatorname{cis}(3\theta \bmod 2\pi) = 1 \cdot \operatorname{cis}(\pi).$$

Vu que deux nombres complexes non-nuls (écrits sous forme trigonométrique) sont égaux si leurs modules et leurs arguments sont égaux, il est équivalent de résoudre le système réel suivant :

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 & \text{avec } \rho \in \mathbb{R}^+, \\ 3\theta = \pi + 2k\pi & \text{avec } \theta \in [0,2\pi[\text{ et } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On voit facilement que les solutions de ce système sont données par $\rho = 1$ et $\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$ (ces valeurs correspondent à $k=0,1,2$). L'ensemble des solutions complexes de l'équation $x^3+1=0$ est donc :

$$\left\{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{cis}(\pi), \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right\} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i},\ -1,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right\}.$$

COMMENTAIRES : On remarque que l'une des solutions est réelle, ce qui était nécessairement le cas vu que l'équation de départ est à coefficients réels et de degré impair. De plus, les deux solutions complexes sont de la forme z et $\bar{z}$; c'est une conséquence du fait que l'équation de départ est à coefficients réels.

Question 2. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que, pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^3$,*

$$\dim V = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim f(V) = 2.$$

Montrer que f est bijective.

Comme f est une application linéraire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective.}$$

Supposons f non bijective. Alors f n'est pas injective. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a $\dim\langle x\rangle = 1$ et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, donc $\langle x\rangle \neq \mathbb{R}^3$. Soit $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $y \notin \langle x\rangle$. Alors (x,y) est libre, donc $\dim\langle x,y\rangle = 2$. On a

$$f\big(\langle x,y\rangle\big) = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle 0_{\mathbb{R}^3}, f(y)\rangle = \langle f(y)\rangle,$$

d'où $\dim f\big(\langle x,y\rangle\big) = \dim\langle f(y)\rangle \leqslant 1$.

Question 3. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \max\{x, 1-x\}$.*

(a) *Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f([1,+\infty[)$, $f(]1,+\infty[)$.*

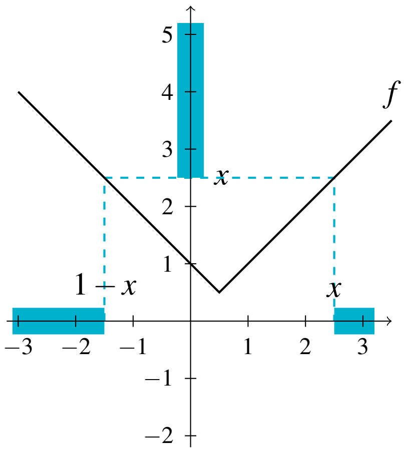
(b) *Pour $x \in \mathbb{R}$ arbitraire, déterminer $f^{-1}(]x,+\infty[)$.*

(c) *Donner un exemple de deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tel que*

$$\varnothing = f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

On a que

$$f(x) = \max\{x, 1-x\} = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{2}, \\ x & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$



(a) Donc $f(\mathbb{R}) = [\frac{1}{2}, +\infty[$, $f([1,+\infty[) = [1,+\infty[$, $f(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$.

(b) On a que $f^{-1}(]x,+\infty[) =]-\infty, 1-x[\cup]x,+\infty[$ si $x \geqslant \frac{1}{2}$, et $f^{-1}(]x,+\infty[) = \mathbb{R}$ si $x < \frac{1}{2}$.

(c) Comme $f(0) = 1 = f(1)$, on a pour $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ que $\varnothing = f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) = \{1\}$.

Question 4. *Soit X un ensemble non vide et $a \in X$. On considère $\mathscr{F} = \{F \subseteq X \mid F \ni a\}$.*

(a) *Prouvez que, pour tout $F \subseteq X$, $a \in F \Leftrightarrow \{a\} \subseteq F$.*

(b) *Prouvez que si $Y \subseteq X$, alors on a que Y ou $\complement Y$ appartient à $\mathscr{F}$.*

(a) Rappelons qu'on a $Y \subseteq F$ si et seulement si (par définition de l'inclusion) $\forall x\, (x \in Y \Rightarrow x \in F)$. Donc, on a (en particularisant au cas $Y = \{a\}$),

$$\begin{aligned} \{a\} \subseteq F \text{ ssi } & \forall x\, (x \in \{a\} \Rightarrow x \in F) \\ \text{ssi } & a \in F \qquad \text{car } a \text{ est le seul élément de } \{a\}. \end{aligned}$$

(b) Par hypothèse $a \in X$ et $X = Y \cup \complement Y$. Par conséquent $a \in Y$ ou $a \in \complement Y$. Vu la définition de $\mathscr{F}$, cela équivaut à $Y \in \mathscr{F}$ ou $\complement Y \in \mathscr{F}$.

Question 5. *Soit $f : E \to F$ une application. Soit $B \subseteq F$.*

(a) *Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.*

(b) *Donner un exemple où $f(f^{-1}(B)) \neq B$.*

(c) *Écrivez $f(f^{-1}(B))$ sous la forme d'une formule dans laquelle n'apparaissent que E, F, B, f, $\cap$, $\cup$ et des parenthèses (chaque symbole peut être utilisé le nombre de fois que vous désirez — y compris pas du tout). Prouvez votre formule.*

(a) Si $x \in E$, $x \in f^{-1}(B)$, alors, par définition, $f(x) \in B$. Donc, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, $f(f^{-1}(\mathbb{R})) = \{0\} \neq \mathbb{R}$.

(c) On a $f(f^{-1}(B)) = f(E) \cap B$. L'inclusion « $\subseteq$ » est une conséquence du point (a). D'autre part, soit $y \in f(E) \cap B$. Alors il existe $x \in E$ avec $y = f(x)$. Comme $y \in B$ on a que $x \in f^{-1}(B)$. Alors $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

Question 6. *Soit $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrez que $q + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$, sachant que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Par l'absurde, supposons que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ soit rationnel. Il existe donc $q_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $q_0 = q + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Par des manipulations élémentaires de calcul, on peut déduire que $(q_0 - q)n = \sqrt{2}$ où $q, q_0, n \in \mathbb{Q}$. Vu que $\mathbb{Q}$ est un corps (et donc stable par addition, inverse et multiplication) la précédente égalité implique que $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est une contradiction.

Question 7. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous :*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) *Prouvez que, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f n'est pas continue en x_0.*

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nous allons supposer (par l'absurde) que f est continue en x_0. Rappelons que si une fonction f est continue en x_0 et qu'une suite $(x_n)_n$ converge vers x_0 alors la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x_0)$. Nous allons distinguer deux cas.

- Soit $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Considérons la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$, pour $n \geqslant 1$. Par la question 6, il s'agit d'une suite dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. De plus, cette suite converge clairement vers x_0. Si nous considérons la suite $(f(x_n))_n$, par définition de f, cette suite est en fait égale à la suite $(-x_n)_n$ et converge donc vers $-x_0$. Toujours par définition de f, nous savons que $f(x_0) = x_0$, vu que $x_0 \in \mathbb{Q}$. Vu que $x_0 \neq 0$, nous avons en particulier que $x_0 \neq -x_0$. Nous avons donc construit une suite (x_n) convergeant vers x_0 telle que la suite $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x_0)$, ce qui contredit la propriété rappelée ci-dessus.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Vu que $\mathrm{adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, on peut trouver une suite de rationnels $(x_n)_n$ qui converge vers x_0. Si nous considérons la suite $(f(x_n))_n$, par définition de f, cette suite est en fait égale à la suite $(x_n)_n$ et converge donc vers x_0. Toujours par définition de f, nous savons que $f(x_0) = -x_0$, vu que $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Vu que $x_0 \neq 0$, nous avons en particulier que $x_0 \neq -x_0$. Nous avons donc construit une suite (x_n) convergeant vers x_0 telle que la suite $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x_0)$, ce qui contredit la propriété rappelée ci-dessus.

(b) *Déterminez le domaine de dérivabilité de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x \cdot f(x)$. Veillez à la qualité de vos justifications.*

Nous allons prouver que le domaine de dérivabilité de g se réduit au singleton $\{0\}$.

Dans un premier temps, nous allons prouver que g n'est pas dérivable en $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous montrerons ensuite que g est dérivable en 0.

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous allons en fait montrer que g n'est pas continue en x_0, ce qui impliquera sa non dérivabilité en x_0. Supposons par l'absurde que g soit continue en x_0, ceci impliquerait que la fonction f est continue en x_0 contredisant le point (a) de cette question. En effet, la fonction f est le quotient de la fonction g par la fonction x ; et on sait que le quotient de deux fonctions continues en x_0 reste continu en x_0 à condition que le dénominateur ne s'annule pas, ce qui est bien le cas ici car $x_0 \neq 0$.

Il nous reste à montrer que g est dérivable en 0. Pour cela, il suffit de montrer que la limite ci-dessous existe :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot f(x)}{x} \qquad \text{(par définition de } g\text{)} \\
&= \lim_{x \to 0} f(x).
\end{aligned}$$

On va prouver que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Il faut donc montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

En appliquant la définition de f, et en remarquant que $|f(x)| = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon.$$

Ce qui est équivalent à prouver que $|x|$ est continue en 0 ; ce qui est clairement vrai (en prenant $\delta = \varepsilon$). Et donc g est dérivable en 0.

Question 8. *Calculer l'infimum et le supremum des ensembles suivants :*

- $A := \left\{ \dfrac{2n+1}{5n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$,
- $B := \{(-3)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- $C := \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Justifiez vos réponses.

- Définissons la suite $a_n := \frac{2n+1}{5n^2}$, $n \geqslant 1$. Alors $A = \left\{ \frac{2n+1}{5n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ est l'ensemble des valeurs de cette suite. On note aussi $\sup_{n\geqslant 1} a_n := \sup A$, le suprémum de A, et $\inf_{n\geqslant 1} a_n := \inf A$, l'infimum de A.

  La somme de deux suites décroissantes et le produit d'une suite décroissante par une constante positive sont encore des suites décroissantes. Comme les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ sont évidemment décroissantes, il résulte des égalités $a_n = \frac{2n+1}{5n^2} = \frac{2}{5n} + \frac{1}{5n^2}$, $n \geqslant 1$, que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$, on a que $\inf_{n\geqslant 1} a_n = 0$. Comme $(a_n)_{n\geqslant 1}$ décroît, son premier terme est aussi le plus grand, c'est-à-dire $\sup_{n\geqslant 1} a_n = a_1 = 3/5$.
- Posons $b_n = (-3)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Considérons (α_n) et (β_n) les deux sous-suites extraites de (b_n) définies par $\alpha_n = b_{2n} = 3^{2n}$ et $\beta_n = b_{2n+1} = -3^{2n+1}$ pour $n \geqslant 0$. Il est clair que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ (en effet (α_n) est une suite géométrique de raison $9 > 1$) et que $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = -\infty$ (en effet, $\beta_n = -3\alpha_n$ pour tout $n \geqslant 0$), donc $\sup_{n\geqslant 0} b_n = +\infty$ et $\inf_{n\geqslant 0} b_n = -\infty$.
- La suite $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geqslant 0$, est une suite géométrique de raison $1/2 \in [0,1[$, ce qui implique que

  (a) (c_n) est décroissante ;

  (b) $c_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$;

  (c) $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.

  On déduit de (b) et de (c) que $\inf_{n\geqslant 0} c_n = 0$. On déduit de (a) que le premier terme de la suite (c_n) est aussi le plus grand, c'est-à-dire $\sup_{n\geqslant 0} c_n = c_0 = 1$.

Question 9. *Soit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto 2y^n$, où n est un entier naturel. Calculer :*

(a) $\lim_{y\to 1, y<1} \lim_{n\to\infty} g_n(y)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \lim_{y\to 1, y<1} g_n(y)$.

Posons $g(y) := \lim_{n\to+\infty} g_n(y)$ si cette limite existe. Par hypothèse $|y| < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} y^n = 0$. Alors $g(y) = 0$; c'est une fonction constante sur $]-1,1[$, donc $\lim_{y\to 1, y<1} g(y)$ existe et est égale à cette valeur constante, c'est-à-dire 0.

Posons $u_n := \lim_{y\to 1, y<1} g_n(y)$ si cette limite existe, pour $n \geqslant 0$. Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction g_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale. Donc $\lim_{y\to 1, y<1} g_n(y)$ existe et vaut $g_n(1) = 2$. Alors la suite (u_n) est constante, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n$ existe et est égale à cette valeur constante, c'est-à-dire 2.

Question 10. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $U(n)$ l'ensemble des racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^n - 1$.*

- *Montrer que $U(n)$ est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*
- *Montrer que $U(n) \cap U(m) = U\big(\operatorname{pgcd}(n,m)\big)$.*

(a) On a $U(n) \subseteq \mathbb{C}^\times$ car $0^n \neq 1$. On a $1 \in U(n)$ car $1^n = 1$. Soient $x, y \in U(n)$; alors $\left(xy^{-1}\right)^n = x^n\left(y^n\right)^{-1} = 1$, donc $xy^{-1} \in U(n)$. Par conséquent $U(n)$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$. L'ensemble $U(n)$ est bien fini car un polynôme de degré n admet au plus n racines dans $\mathbb{C}$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}^\times$. On a[1]

$$\begin{aligned}
z \in U(n) \cap U(m) &\Leftrightarrow z^n = 1 \text{ et } z^m = 1 \\
&\Leftrightarrow \operatorname{ord}(z) \text{ divise } n \text{ et } \operatorname{ord}(z) \text{ divise } m \\
&\Leftrightarrow \operatorname{ord}(z) \text{ divise } \operatorname{pgcd}(n,m) \\
&\Leftrightarrow z^{\operatorname{pgcd}(n,m)} = 1 \\
&\Leftrightarrow z \in U\big(\operatorname{pgcd}(n,m)\big).
\end{aligned}$$

[1] On rappelle qu'étant donné $z \in \mathbb{C}^\times$, on définit $\operatorname{ord}(z) = |\langle z \rangle|$ qui est l'ordre du sous groupe de $\mathbb{C}^\times$ engendré par z. On a prouvé en 1[re] BAC que $z^n = 1 \Leftrightarrow \operatorname{ord}(z)$ divise n.