Mathématiques générales

Examen (13 janvier 2011)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire telle que $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. Montrez que $f + \mathrm{id}_E$ est bijective. /4

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 2. Donnez, sous la forme $a+b\boldsymbol{i}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, toutes les solutions complexes de l'équation $x^3+x^2+x+1=0$. /4

Mathématiques générales

Examen (13 janvier 2011)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/4

Question 3. Soient a et b des nombres réels positifs. Démontrer les inégalités :

- $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$,
- $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs. La qualité de votre rédaction est importante.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 4. Déterminez l'ensemble des solutions de l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: /4

$$\sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{x}.$$

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 5. Soient deux fonctions $f_1 : A \to B$ et $f_2 : B \to C$. Il est possible que $\operatorname{Dom} f_1 \neq A$ et $\operatorname{Dom} f_2 \neq B$. Montrez *en détail* que $\operatorname{Dom}(f_2 \circ f_1) = f_1^{-1}(\operatorname{Dom} f_2) \cap \operatorname{Dom} f_1$. $/3$

Mathématiques générales

Examen (13 janvier 2011)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 6. Dans chacun des cas suivants, donnez, si possible, une fonction qui satisfait la condition donnée. N'oubliez pas de justifer vos réponses ! $/6$

(a) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$ qui n'est continue que sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(b) Une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est dérivable que sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(c) Une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et qui satisfait la formule suivante :

$$\exists y_1 \in \mathbb{R},\ \exists y_2 \in \mathbb{R}, \quad (y_1 \neq y_2) \wedge \big(\forall x_1 \in \mathbb{Q},\ h(x_1) = y_1\big) \wedge \big(\forall x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ h(x_2) = y_2\big)$$

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

/8

Question 7. Soit $f : E \to F$ une application.

(a) Montrer que, pour tout $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$, $A \subseteq f^{-1}(B)$ si et seulement si $f(A) \subseteq B$.

(b) Montrer que, pour tout $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$, $f(\complement A) \subseteq \complement B$ si et seulement si $f^{-1}(B) \subseteq A$.

(c) Trouver un exemple qui montre que l'implication $B \subseteq f(A) \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq A$ est fausse.

(d) Trouver un exemple qui montre que l'implication $f^{-1}(B) \subseteq A \Rightarrow B \subseteq f(A)$ est fausse.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

/6

Question 8. On peut montrer qu'un sous-ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\big(x \leqslant z \leqslant y \text{ et } x, y \in I\big) \Rightarrow z \in I.$$

Ici, un intervalle est un ensemble de la forme $\varnothing$, $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$, $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$ pour certains $a,b \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante définie sur tout $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(I)$ est un intervalle.

(b) Donner un exemple d'une fonction croissante et un intervalle $[a,b]$ tels que $f^{-1}\big([a,b]\big) =]c,d[$, où $-\infty < a < b < +\infty$, $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$.

(c) Donner un exemple d'une fonction croissante et un intervalle $]a,b[$ tels que $f^{-1}\big(]a,b[\big) = [c,d]$, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $-\infty < c < d < +\infty$.

Mathématiques générales

Examen (13 janvier 2011)

Nom : ________________

Prénom : ________________

Section : BAC 2 math

/4

Question 9. Soit n un entier naturel. Calculer

$$\alpha_n = \sup\{x^n e^{-x} \mid x \in [0, +\infty[\}.$$

Étudier les limites, lorsque $n \to +\infty$, de α_n et de $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$.

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : BAC 2 math

/4

Question 10. On rappelle qu'un morphisme de groupe $f : G \to H$ induit un isomorphisme $G/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f)$. Soient p un nombre premier impair et $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ le groupe des éléments inversibles pour la multiplication dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- Montrer que l'application $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times : x \mapsto x^2$ est un morphisme de groupe.
- Montrer que l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \;\middle|\; \exists y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ tel que } x = y^2\right\}$ est de cardinal $\frac{p+1}{2}$.