Mathématiques générales

Examen

(26 avril 2011)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez, sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, toutes les solutions complexes de l'équation $x^5 = x^3 + 2x$. Détaillez vos calculs. $/3$

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 2. Soit X un ensemble et $f : X \to X$ une application (définie sur tout X). Soit $A \subseteq X$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : /3

(a) $f^{-1}(A) = A$;

(b) $f(A) \subseteq A$ et $f(X \setminus A) \subseteq X \setminus A$.

Mathématiques générales

Examen (26 avril 2011)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 3. Soient K un corps et E, F des K-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f : E \to F$ une application et

/4

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in E\}.$$

(a) Montrer que f est linéaire si et seulement si $\Gamma(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

(b) On suppose que f est linéaire. Montrer que $\dim \Gamma(f) = \dim E$.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/4

Question 4. Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs réelles. On suppose que f est continue et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est bornée.

Mathématiques générales

Examen (26 avril 2011)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 5. Dans chacun des cas suivants, donnez, si possible, une fonction qui satisfait les conditions données. N'oubliez pas de justifier vos réponses ! /4

(a) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont les trois premiers termes du développement de Taylor en 0 sont $1 + x + x^2$.

(b) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique (de période $P > 0$) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/4

Question 6. Soit X un ensemble et $f : X \to X$ et $g : X \to X$ deux applications (définies sur tout X). Supposons que f et g commutent, c'est-à-dire, que $f \circ g = g \circ f$.

(a) Montrer que si $f \circ g$ est injective alors f et g le sont également.

(b) Montrer que si $f \circ g$ est surjective alors f et g le sont également.

Mathématiques générales

Examen (26 avril 2011)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme d'anneau. /6

(a) Montrer que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que $f(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

(c) Déterminer tous les morphismes d'anneau continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Veillez à la qualité de votre rédaction.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/8

Question 8. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Pour répondre aux différentes questions suivantes, on rappellera les définitions et on démontrera ce que l'on affirmera.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente, alors est-elle bornée ?

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente, alors est-elle une suite de Cauchy ?

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 8 (suite).

Vrai : ☐ Faux : ☐ On suppose que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 2^{-n}$ pour tout entier positif n. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle convergente ?

Vrai : ☐ Faux : ☐ On suppose $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$ pour tout entier positif n. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle convergente ?