Mathématiques générales

Examen (1er septembre 2011)

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Trouvez toutes les solutions complexes de l'équation suivante : /4

$$x + x^3 + x^5 + x^7 = 0.$$

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous : /4

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Déterminez l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où la fonction f est continue.

(b) Déterminez l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où la fonction f est dérivable.

Prouvez toutes vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 3. Soient Ω un ensemble et $A_n \subseteq \Omega$ $(n \geqslant 1)$ une famille de sous-ensembles. Posons $/3$

$$B := \{x \in \Omega : \forall k \geqslant 1,\ \exists n \geqslant k,\ \forall l \geqslant 1,\ n \leqslant l \leqslant 2n \Rightarrow x \in A_l\}.$$

Alors :

- ☐ $B = \bigcap_{k\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant k} \bigcap_{n\leqslant l\leqslant 2n} A_l$;
- ☐ $B = \bigcup_{k\geqslant 1} \bigcap_{n\geqslant k} \bigcup_{n\leqslant l\leqslant 2n} A_l$;
- ☐ $B = \bigcap_{k\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant k} \bigcap_{l\geqslant 1} \big(\{l \geqslant 1 : n \leqslant l \leqslant 2n\}^c \cup A_l\big)$;
- ☐ $B = \bigcup_{k\geqslant 1} \bigcap_{n\geqslant k} \bigcup_{l\geqslant 1} \big(\{l \geqslant 1 : n \leqslant l \leqslant 2n\}^c \cap A_l\big)$.

Cocher la ou les réponses correctes. Justifiez.

Question 4. Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application arbitraire, et $y \in Y$. Seulement une des assertions suivantes a *toujours* un sens. Laquelle ? Cocher la réponse correcte. $/3$

- ☐ $f^{-1}(y) \in X$;
- ☐ $f^{-1}(\{y\}) \in X$;
- ☐ $f^{-1}(y) \subseteq X$;
- ☐ $f^{-1}(\{y\}) \subseteq X$.

Justifiez votre choix.

Mathématiques générales

Examen (1er septembre 2011)

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 5.

/3

- Définissez « $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble A ».
- Donnez un ensemble A et une relation d'équivalence $\sim$ sur celui-ci telle que celle-ci possède une infinité de classes (d'équivalence), chacune d'entre elles possédant une infinité d'éléments.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$, $\partial_x f(0) < 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Prouvez que f possède (au moins) une racine strictement positive. /4

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/6

Question 7. Soient $E_n = \{1, \dots, n\}$, S_n l'ensemble des permutations de E_n et m vérifiant $2 \leqslant m < n-1$. On pose X l'ensemble des applications $f : E_m \to E_n$ (donc $\operatorname{Dom} f = E_m = \{1, \dots, m\}$). On définit l'application $r : S_n \to X$ par

$$r(p) = p\restriction_{E_m}.$$

(a) Montrez que r n'est ni injective, ni surjective.

(b) Donnez explicitement X quand $n = 4$ et $m = 2$. Dans ce cas, donnez le graphe de r.

(c) Déterminez les ensembles suivants :

$$A = \{p \in S_n \mid r(p) \in S_m\} \qquad \text{et} \qquad B = \{p \in S_n \mid r(p) = \mathrm{id}_{E_m}\}.$$

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8. Trouvez toutes les solutions de l'équation $\cos x = \sin x$, où x est un nombre réel. /2

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 9. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f, g : E \to F$ des applications linéaires non nulles telles que $\operatorname{Ker}(f) \neq \operatorname{Ker}(g)$. Montrer que (f, g) est libre. /4

Question 10. Déterminer l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^n - 1$. /3

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 11. Étudier les limites des suites $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(n\log(1+1/n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifiez vos réponses. $/4$

Question 12. Soient x un nombre réel positif et n un entier naturel. Comparer $(1+x)^n$ et $1+nx$. Justifiez votre réponse. $/3$