Mathématiques générales

Examen (8 novembre 2011)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, toutes les solutions complexes de l'équation $x^5 + (1 - \boldsymbol{i})x^3 - \boldsymbol{i}x = 0$. Détaillez vos calculs. /4

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/4

Question 2. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$V_a := \langle (1,0,a),(a,0,1) \rangle \quad \text{et} \quad W_b := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + bz = 0\}.$$

Déterminez l'ensemble des $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\mathbb{R}^3 = V_a \oplus W_b$.

Mathématiques générales

Examen (8 novembre 2011)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 3. /4

(a) Rappelez la définition en ε-δ de la continuité d'une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs réelles.

(b) En utilisant la définition rappelée en (a), démontrez que la fonction définie sur l'ensemble des réels par $x \mapsto x^2$ est continue.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et φ la propriété définie ci-dessous : /6

$$\forall A \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ (x > A) \wedge (f(x) > A).$$

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (n'oubliez pas de justifier vos réponses !).

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f satisfait φ, alors f est croissante.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est croissante, alors f satisfait φ.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f satisfait φ, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f satisfait φ.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

/4

Question 5. Soient E un ensemble, $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E, et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Soit l'application

$$\begin{aligned} \theta : \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B). \end{aligned}$$

(a) Montrez que θ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

(b) Montrez que θ est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

/6

Question 6. Soit $f : E \to F$ une application et $A, B \subseteq E$. Pour chacune des assertions suivantes, déterminez si elle est toujours vraie. Si oui, donnez une brève justification. Dans le cas contraire, donnez un contre-exemple. (Remarque : la notation $f : E \to F$ implique que $\operatorname{Dom} f = E$.)

Vrai : ☐ Faux : ☐ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

Vrai : ☐ Faux : ☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$;

Vrai : ☐ Faux : ☐ $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$;

Vrai : ☐ Faux : ☐ $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

Mathématiques générales

Examen (8 novembre 2011)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 7. Soit Ω un ensemble et $A_n \subseteq \Omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, une suite de sous-ensembles. /4

(a) Soit
$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$
Que peut-on dire de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in A_n\}$?

(b) Soit
$$x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$
Que peut-on dire de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in A_n\}$? Que peut-on dire de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in \Omega \setminus A_n\}$?

Mathématiques générales

Examen (8 novembre 2011)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 8. Démontrez que la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. $/4$

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 9. Prouvez que l'équation $e^x = -x$ possède une unique solution réelle. Détaillez votre raisonnement et veillez à la qualité de votre rédaction. /4