Mathématiques générales

Examen (23 janvier 2012)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, toutes les solutions complexes de l'équation $x^5 + (2+\boldsymbol{i})x^3 + 2\boldsymbol{i}x = 0$. Détaillez vos calculs. /4

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

/4

Question 2. Étudier la limite des expressions

$$\frac{e^x - 1}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos x - 1}{x}$$

lorsque x tend vers $-\infty$, 0, et $+\infty$. Veillez à la précision de vos justifications.

Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et φ la propriété définie ci-dessous : /6

$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x_1 \in \mathbb{R},\ \exists x_2 \in \mathbb{R}\ (x_2 > x_1) \wedge (f(x_2) = y).$$

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (n'oubliez pas de justifier vos réponses !).

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f satisfait φ, alors f est périodique.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est périodique, alors f satisfait φ.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f satisfait φ, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie, alors f satisfait φ.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 4. Soient E, F, G des K-espaces vectoriels, et $f : E \to F$, $g : E \to G$ des applications linéaires. Soit l'application linéaire /5

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \times G \\ x &\longmapsto (f(x), g(x)). \end{aligned}$$

Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Im}(g)$ si et seulement si $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 5. Soient Ω un ensemble et $A, B, C \subseteq \Omega$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : /4

(a) il existe un ensemble $D \subseteq \Omega$ tel que $A \cap B = (A \cap C) \cup D$;

(b) $(C \setminus B) \cap A = \varnothing$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 6. Montrer que $\mathbb{C}^\times$ (le groupe multiplicatif de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) possède un unique sous-groupe d'ordre n pour tout entier $n \geqslant 1$. /4

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 7.

/4

(a) Donner la définition en ε-δ de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) En montrant que la définition rappelée en (a) est vérifiée ou non, discutez la continuité de la fonction f définie sur l'ensemble des réels de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in]-\infty, 1[, \\ 1 & \text{pour } x \in [1, 2], \\ 2 & \text{pour } x \in]2, +\infty[. \end{cases}$$

Mathématiques générales

Examen (23 janvier 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 8. Soient Ω un ensemble et $A_n \subseteq \Omega$, $n \geqslant 1$, des sous-ensembles. On définit

/6

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{k\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant k} A_n; \tag{1}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{k\geqslant 1} \bigcap_{n\geqslant k} A_n. \tag{2}$$

(a) Montrer que $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subseteq \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$.

(b) Soit $\Omega = \mathbb{N}$. Montrer qu'il y a des ensembles $A_n \subseteq \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, tels que $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{0\}$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{0, 1\}$.

(c) Soient Ω un ensemble arbitraire et $A \subseteq B \subseteq \Omega$. Montrer qu'il y a des ensembles $A_n \subseteq \Omega$, $n \geqslant 1$, tels que $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = A$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = B$.

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 9. Soit $P(x,y)$ un polynôme à coefficients réels en les variables x et y. Supposons que, pour toute rotation R de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(0,0)$, on ait $P(R(x,y)) = P(x,y)$. Montrer que P peut s'écrire comme /3

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{d} c_i (x^2+y^2)^i$$

pour certains coefficients $c_i \in \mathbb{R}$. Rappelons qu'une rotation R centrée en 0 est une application linéaire telle que $R(x,y) \cdot R(x',y') = (x,y) \cdot (x',y')$ et $\det R > 0$ où « $\cdot$ » désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.