Mathématiques générales

Examen (31 octobre 2012)

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /4

(a) Donner la définition en ε, δ de la continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

(b) En utilisant *directement* la définition rappelée en (a), démontrer que la fonction $x \mapsto 1/x$ est continue de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$.

Mathématiques générales

Examen (31 octobre 2012)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 2. Dans chacun des cas suivants, donnez si possible un polynôme à **coefficients réels** qui satisfait la propriété donnée. Justifiez votre réponse. /6

(a) Un polynôme p_1 possédant (au moins) une racine α telle que $\alpha^2 = \boldsymbol{i}$.

(b) Un polynôme p_2 de degré 5, dont toutes les racines sont dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(c) Un polynôme p_3 de degré 4 dont les seules racines sont $\boldsymbol{i}$, $1+\boldsymbol{i}$ et $2+\boldsymbol{i}$.

(d) Un polynôme p_4 de degré 2 possédant (au moins) une racine β telle que $1-\beta+\beta^2-\beta^3+\beta^4 = 0$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 3. /5

(a) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f \circ f = \mathbf{0}$ et $f \neq \mathbf{0}$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0_E$. Montrer que $\big(x, f(x)\big)$ est une base de E.

(b) Montrer que $\big\{A \in M_2(\mathbb{R}) \;\big|\; A^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}\big\} = \big\{C\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)C^{-1} \;\big|\; C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\big\} \cup \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 4. Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application arbitraire (il est sous-entendu que $\mathrm{Dom}(f) = X$). /5

(a) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $B \subseteq Y$,

$$B \subseteq f\big(f^{-1}(B)\big).$$

(b) Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $A \subseteq X$,

$$f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A.$$

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 5. Soient $\sigma = (1\,2)$ et $\tau = (1\,3\,2) \in S_3$. /6

(a) Déterminer l'ordre du sous-groupe $\langle \tau, \sigma\tau\sigma^{-1} \rangle$ de S_3 engendré par τ et $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

(b) Déterminer l'ordre du sous-groupe $\langle \sigma, \tau\sigma\tau^{-1} \rangle$ de S_3 engendré par σ et $\tau\sigma\tau^{-1}$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 6.

/4

(a) Donner un exemple d'une suite décroissante $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, pour tout $n \geqslant 1$, $\varnothing \neq A_{n+1} \subseteq A_n \subseteq \mathbb{R}$) telle que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing.$$

(b) Soit $X = \{1, 2, 3, \ldots, 17\}$. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de sous-ensembles non vides de X. Montrer que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing.$$

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/6

Question 7. On pose $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ pour tout x réel. Calculer :

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Déterminer :

(c) $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$

(d) $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$

Justifiez vos réponses.

Mathématiques générales

Examen (31 octobre 2012)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (rappel $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$) telle que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il est nécessaire que f soit dérivable pour qu'elle admette un maximum.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est surjective, alors f admet un minimum.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est surjective et deux fois dérivable, alors f admet un minimum.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est dérivable et admet un maximum (global), alors il existe $L \in \mathbb{R}^+$ tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/4

Question 9. On note $\mathscr{F}(A;\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur (tout) A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que A possède au moins deux éléments et on considère $X \subseteq \mathscr{F}(A;\mathbb{R})$ un sous-espace vectoriel tel que[1]

$$\forall f \in X,\ f \geqslant 0 \text{ ou } f \leqslant 0. \tag{1}$$

(a) Donnez un exemple d'un tel espace X.

(b) Montrez que (1) implique que $\dim X \leqslant 1$. (Indication : argumentez par contradiction.)

[1] Pour rappel, on dit qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est positive et on écrit $f \geqslant 0$ si et seulement si $\forall x \in A,\ f(x) \geqslant 0$.