Mathématiques générales

Examen (31 octobre 2012) **Correction**

Question 1.

(a) Donner la définition en ε, δ de la continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

La fonction f, définie sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, est continue sur I si elle continue en tout point a de I, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

(b) En utilisant directement *la définition rappelée en (a), démontrer que la fonction $x \mapsto 1/x$ est continue de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$.*

Pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, montrons que f est continue en tout point a réel non nul fixé. Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons un réel strictement positif δ tel que, pour tout réel non nul x, la condition

$$|x-a| < \delta$$

entraine

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Soit x réel non nul tel que $|x-a| < \delta$. Calculons :

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x-a|}{|x|\,|a|}.$$

Majorons $\frac{1}{|x|}$. Comme on a toujours (variante de l'inégalité triangulaire) $\big||x| - |a|\big| \leqslant |x-a|$, on a par hypothèse $|a| - \delta < |x| < |a| + \delta$. Choisissons δ tel que $\frac{|a|}{2} < |a| - \delta$, c'est-à-dire $\delta < \frac{|a|}{2}$, on a alors $\frac{1}{|x|} < \frac{2}{|a|}$. Il en résulte

$$\frac{|x-a|}{|x||a|} < \frac{2\delta}{|a|^2}.$$

Si δ vérifie la condition supplémentaire $\frac{2\delta}{|a|^2} < \varepsilon$, c'est-à-dire $\delta < \frac{|a|^2\varepsilon}{2}$, on obtient $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Conclusion : choisissons δ tel que $0 < \delta < \min\{\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2\varepsilon}{2}\}$; ce qui précède montre que pour tout réel non nul x, la condition $|x-a| < \delta$ entraine $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ce qui prouve la continuité de f en a.

Question 2. *Dans chacun des cas suivants, donnez si possible un polynôme à* ***coefficients réels*** *qui satisfait la propriété donnée. Justifiez votre réponse.*

(a) *Un polynôme p_1 possédant (au moins) une racine α telle que $\alpha^2 = \boldsymbol{i}$.*

(b) *Un polynôme p_2 de degré 5, dont toutes les racines sont dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.*

(c) *Un polynôme p_3 de degré 4 dont les seules racines sont $\boldsymbol{i}$, $1+\boldsymbol{i}$ et $2+\boldsymbol{i}$.*

(d) *Un polynôme p_4 de degré 2 possédant (au moins) une racine β telle que $1-\beta+\beta^2-\beta^3+\beta^4 = 0$.*

(a) On prend $p_1(x) = x^4+1$, ce polynôme est clairement à coefficient réels. Il reste à prouver que $p_1(\alpha) = 0$. On a que $p_1(\alpha) = \alpha^4+1 = (\alpha^2)^2+1 = \boldsymbol{i}^2+1 = 0$.

(b) On sait que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède (au moins) une racine réelle. Il est donc impossible de trouver un polynôme de degré cinq dont toutes les racines sont dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

(c) On sait que si p est un polynôme à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de p (i.e. $p(\alpha) = 0$) ; on a nécessairement que le conjugué de α est également une racine de p, (i.e. $p(\bar{\alpha}) = 0$). Prouvons par l'absurde qu'il est impossible de trouver un polynôme p_3 satisfaisant la condition demandée. Supposons qu'il existe un tel polynôme p_3. En particulier p_3 est à coefficients réels et $p_3(\boldsymbol{i}) = 0$. On peut donc déduire que $p_3(-\boldsymbol{i}) = 0$; ce qui est impossible vu que les seules racines de p_3 sont $\boldsymbol{i}$, $1+\boldsymbol{i}$ et $2+\boldsymbol{i}$.

(d) *Réponse attendue* : Remarquons tout d'abord que trouver $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $1-\beta+\beta^2-\beta^3+\beta^4 = 0$ est équivalent à trouver une racine du polynôme $q(z) = 1-z+z^2-z^3+z^4$. On cherche donc $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $q(\beta) = 0$. On remarque que :

$$q(z) = 1-z+z^2-z^3+z^4 = 1+(-z)+(-z)^2+(-z)^3+(-z)^4.$$

On peut donc écrire :

$$\big(1+(-z)+(-z)^2+(-z)^3+(-z)^4\big)\big(1-(-z)\big) = 1-(-z)^5 = 1+z^5.$$

Une racine de $q(z)$ est donc une racine de $1+z^5$ différente de -1. Écrivons z sous forme trigonométrique : $z = \rho\cdot\operatorname{cis}(\theta)$ où $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0,2\pi[$. L'équation $1+z^5 = 0$ devient :

$$\big(\rho\cdot\operatorname{cis}(\theta)\big)^5 = 1\cdot\operatorname{cis}(\pi).$$

La formule de de Moivre nous assure que cette équation est équivalente à l'équation ci-dessous :

$$\rho^5\cdot\operatorname{cis}(5\theta) = 1\cdot\operatorname{cis}(\pi).$$

Vu que deux nombres complexes (écrits sous forme trigonométrique) sont égaux si leurs modules et leurs arguments sont égaux, il est équivalent de résoudre le système réel suivant :

$$\begin{cases} \rho^5 = 1 & \text{avec } \rho \in \mathbb{R}^+ \\ 5\theta = \pi+2k\pi & \text{avec } \theta \in [0,2\pi[\text{ et } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On voit facilement qu'une solution de système est donnée par $\beta = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Le polynôme $p_4(x)$ est donc donné par $(x-\beta)(x-\bar{\beta}) = x^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)x + 1$.

<u>*Réponse admise*</u> : Soit $q(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 = 0$. Vu que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, on sait qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $q(\beta) = 0$. Le polynôme $p_4(x)$ est donné par $(x-\beta)(x-\bar{\beta}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\beta) + |\beta|^2$. On vérifie facilement qu'il est à coefficients réels.

Question 3.

(a) *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f \circ f = \mathbf{0}$ et $f \neq \mathbf{0}$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0_E$. Montrer que $\big(x, f(x)\big)$ est une base de E.*

(b) *Montrer que $\left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}\right\} = \left\{C\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)C^{-1} \;\middle|\; C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\right\} \cup \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.*

(a) Comme $\dim E = 2 = \#\{x, f(x)\}$, la suite $(x, f(x))$ est une base de E si et seulement si elle est libre. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ax + bf(x) = 0_E$. En appliquant f à cette égalité on obtient $f\big(ax + bf(x)\big) = af(x) + b(f \circ f)(x) = af(x) = 0_E$, puisque f est linéaire et $f \circ f = \mathbf{0}$. Comme $f(x) \neq 0_E$ on en déduit que $a = 0$. On obtient alors $bf(x) = 0_E$, ce qui implique $b = 0$ puisque $f(x) \neq 0_E$. Donc la suite $\big(x, f(x)\big)$ est libre.

(b) Soient $N = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}\}$ et $N' = \left\{C\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)C^{-1} \;\middle|\; C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\right\} \cup \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

Soit $M \in N'$. Si $M = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ alors $M^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$, donc $M \in N$. Sinon, soit $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $M = C\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)C^{-1}$. Alors $M^2 = C\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2C^{-1}$ puisque la conjugaison est un morphisme d'anneau. Comme $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, on obtient $M^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$, d'où $M \in N$. Donc $N' \subseteq N$.

Soit $A \in N$. Si $A = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ alors $A \in N'$. Supposons $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, B une base de E, et $f : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base B est A. Alors $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ et $A^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ équivaut à $f \neq \mathbf{0}$ et $f \circ f = \mathbf{0}$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0_E$. Par le point précédent, $(x, f(x))$ est une base de E. Comme $f(f(x)) = 0_E$, la matrice de f dans la base $\big(x, f(x)\big)$ est $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent il existe $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = C\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)C^{-1}$ (C est la matrice de passage d'une base à l'autre), d'où $A \in N'$. Donc $N \subseteq N'$.

Question 4. *Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application arbitraire (il est sous-entendu que* $\operatorname{Dom}(f) = X$*).*

(a) *Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $B \subseteq Y$,*

$$B \subseteq f\big(f^{-1}(B)\big).$$

(b) *Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $A \subseteq X$,*

$$f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A.$$

(a) Supposons que f soit surjective. Soit $B \subseteq Y$, et soit $y \in B$. Par surjectivité il existe un $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Ceci implique que $x \in f^{-1}(B)$ et donc que $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors, $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.

Supposons maintenant que, pour tout $B \subseteq Y$, $B \subseteq f(f^{-1}(B))$. Soit $y \in Y$. Si on prend $B = \{y\}$ on en déduit que $\{y\} \subseteq f(f^{-1}(\{y\})) \subseteq f(X)$ et donc que $y \in f(X)$. Ceci montre que f est surjective.

(b) Supposons que f soit injective. Soit $A \subseteq X$, et soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$; donc il y a un $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Comme f est injective on en déduit que $x = a \in A$. Ceci montre que $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

Supposons maintenant que, pour tout $A \subseteq X$, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. Soient $x, y \in X$ tels que $f(x) = f(y)$. Si on prend $A = \{x\}$ on obtient que $\{x, y\} \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq A = \{x\}$, et donc que $y = x$. Ceci montre que f est injective.

Question 5. *Soient $\sigma = (1\,2)$ et $\tau = (1\,3\,2) \in S_3$.*

(a) *Déterminer l'ordre du sous-groupe $\langle \tau, \sigma\tau\sigma^{-1} \rangle$ de S_3 engendré par τ et $\sigma\tau\sigma^{-1}$.*

(b) *Déterminer l'ordre du sous-groupe $\langle \sigma, \tau\sigma\tau^{-1} \rangle$ de S_3 engendré par σ et $\tau\sigma\tau^{-1}$.*

(a) On a $\sigma\tau\sigma^{-1} = (1\ 2\ 3) = \tau^{-1} \in \langle \tau \rangle$. Par conséquent $\langle \tau, \sigma\tau\sigma^{-1} \rangle = \langle \tau \rangle$ est d'ordre 3 puisque τ est un 3-cycle.

(b) Soit $n = |\langle \sigma, \tau\sigma\tau^{-1} \rangle|$. On a une chaîne de sous-groupes $\langle \sigma \rangle < \langle \sigma, \tau\sigma\tau^{-1} \rangle < S_3$ avec $|\langle \sigma \rangle| = 2$ puisque τ est une transposition et $|S_3| = 3! = 6$. On en déduit par le théorème de Lagrange que $2 \mid n \mid 6$, donc $n = 2$ ou $n = 6$ puique $6/2 = 3$ est premier. De plus $n = 2$ si et seulement si $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma, \tau\sigma\tau^{-1} \rangle$, ce qui équivaut à $\tau\sigma\tau^{-1} \in \langle \sigma \rangle$. Or $\tau\sigma\tau^{-1} = (1\,3)$ est de support différent de celui de σ, donc $\tau\sigma\tau^{-1} \notin \langle \sigma \rangle$. Par conséquent $n = 6$.

Question 6.

(a) *Donner un exemple d'une suite décroissante $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, pour tout $n \geqslant 1$, $\varnothing \neq A_{n+1} \subseteq A_n \subseteq \mathbb{R}$) telle que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing.$$

(b) *Soit $X = \{1,2,3,\dots,17\}$. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de sous-ensembles non vides de X. Montrer que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing.$$

(a) Il suffit de prendre $A_n = [n, +\infty[$, $n \geqslant 1$.

(b) Soit $X = \{1,2,3,\dots,17\}$. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de sous-ensembles non vides de X. Il faut montrer que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$. Nous donnons deux preuves.

Preuve 1. Soit $N_n = \operatorname{card} A_n$. Comme $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante, la suite $(N_n)_{n\geqslant 1}$ est également décroissante. Puisque les N_n sont des entiers positifs, la suite $(N_n)_{n\geqslant 1}$ est ultimement constante, c'est-à-dire, qu'il y a un n_0 tel que $N_n = N_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$. Comme $A_n \subseteq A_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$, et comme les A_n sont des ensembles *finis* on en déduit que $A_n = A_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$. Ceci implique que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_{n_0} \neq \varnothing$.

Preuve 2. Nous faisons une preuve par l'absurde. Supposons que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Ceci implique que pour tout $k \in X$, $k = 1,\dots,17$, il y a un n_k tel que $k \notin A_{n_k}$. Soit $N = \max(n_1,\dots,n_{17})$. Comme la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante on déduit que $k \notin A_N$ pour $k = 1,\dots,17$ et donc que $A_N = \varnothing$, ce qui contredit les hypothèses.

Question 7. *On pose $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ pour tout x réel. Calculer :*

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Déterminer :

(c) $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$

(d) $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$

Justifiez vos réponses.

Soit x réel. Comme $|x|$ est toujours positif, on voit que $f(x)$ est du signe de x. Puisqu'un nombre négatif est toujours plus petit qu'un nombre positif, on a en outre $f(x) \leqslant f(y)$ pour tout x négatif et tout y positif. Il en résulte que la borne inférieure de f sur $\mathbb{R}$ est égale à la borne inférieure de la restriction de f à l'ensemble $]-\infty,0]$ des nombres réels négatifs et que la borne supérieure de f sur $\mathbb{R}$ est égale à la borne supérieure de la restriction de f à l'ensemble $[0,+\infty[$ des nombres réels positifs.

Supposons $x \geqslant 0$. Calculons :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

Comme $\frac{1}{1+x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, on voit que $f(x)$ admet une limite en $+\infty$ et que $\lim_{+\infty} f = 1$.

Rappelons les propriétés — bien connues — suivantes des fonctions monotones :

- si la fonction f est croissante (resp. décroissante) et ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f}$ est décroissante (resp. croissante) ;
- si la fonction f est croissante (resp. décroissante) alors $-f$ est décroissante (resp. croissante) ;
- si deux fonctions f et g sont croissantes (resp. décroissantes) alors $f+g$ est croissante (resp. décroissante), ce qui est vrai en particulier si g est constante.

Ces propriétés, le fait évident que la fonction $x \mapsto x$ est croissante et l'expression de $f(x)$ que nous avons calculée montrent que la restriction de f à $[0,+\infty[$ est croissante. On a donc

$$\sup_{[0,+\infty[} f = \lim_{+\infty} f = 1.$$

Il en résulte

$$\sup_{\mathbb{R}} f = 1.$$

Pour $x \leqslant 0$, on a $f(x) = -1 + \frac{1}{1-x}$ et en raisonnant comme précédemment on obtient que $\lim_{-\infty} f = -1$, que la restriction de f à $]-\infty,0]$ est croissante et que $\inf_{\mathbb{R}} f = -1$.

Question 8. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *(rappel* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$*) telle que* $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. *Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Il est nécessaire que f soit dérivable pour qu'elle admette un maximum.*

Il suffit de donner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, f admette un maximum et f ne soit pas dérivable. On considère par exemple la fonction définie ci-dessous :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. La fonction f admet un maximum en 0, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que $f(x) \leqslant f(0) = 1$. La fonction f n'est pas continue en 0, en effet $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$, elle n'est donc pas dérivable en 0.

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Si f est surjective, alors f admet un minimum.*

Vu que f est surjective, pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. En particulier, il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$. La fonction f admet un minimum en x_0, en effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a que $f(x_0) = 0 \leqslant f(x)$, vu que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Si f est surjective et deux fois dérivable, alors f admet un minimum.*

Conséquence immédiate de la réponse au point (b).

(d) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Si f est dérivable et admet un maximum (global), alors il existe $L \in \mathbb{R}^+$ tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.*

Il suffit de donner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dérivable, telle que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas. Considérerons par exemple la fonction $f(x) = \sin(x) + 1$. Il est clair que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Vu que $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, on a que $-1+1 \leqslant \sin(x)+1 \leqslant 1+1$, donc en particulier quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geqslant 0$. On a donc bien que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Vu que f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (sin et 1), on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il reste à prouver que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas. Si on considère la suite $(x_n)_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, on a que $f(x_n) = (-1)^{n+1} + 1$, il est donc impossible que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe.

Question 9. *On note $\mathscr{F}(A;\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur (tout) A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que A possède au moins deux éléments et on considère $X \subseteq \mathscr{F}(A;\mathbb{R})$ un sous-espace vectoriel tel que*[1]

$$\forall f \in X,\ f \geqslant 0 \text{ ou } f \leqslant 0. \tag{1}$$

(a) *Donnez un exemple d'un tel espace X.*

(b) *Montrez que* (1) *implique que* $\dim X \leqslant 1$. *(Indication : argumentez par contradiction.)*

(a) Il suffit de prendre tous les multiples d'une fonction positive. Par exemple, on peut considérer le sous espace des fonctions constantes (les multiples de la fonction constante 1) : $X = \{f \mid f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto c \text{ pour un } c \in \mathbb{R}\}$.

[1]Pour rappel, on dit qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est positive et on écrit $f \geqslant 0$ si et seulement si $\forall x \in A,\ f(x) \geqslant 0$.

(b) Supposons au contraire qu'il existe un espace X qui vérifie (1) et qui est au moins de dimension 2. On sait donc qu'il existe deux fonctions linéairement indépendantes f et g dans X. Rappelons que l'indépendance linéaire signifie que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha f + \beta g = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0. \tag{2}$$

(L'égalité $\alpha f + \beta g = 0$ est bien sûr à prendre au sens des fonctions.) Remarquons que si on multiplie f et g par des constantes non-nulles, les fonctions résultantes sont toujours linéairement indépendantes (pouvez vous faire les détails ?). Vu (1) on peut, sans perte de généralité, supposer $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$ (quitte à multiplier au besoin f ou g par -1).

<u>Première argumentation</u>

Comme la fonction f ne peut être identiquement nulle (sinon il suffit de prendre $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ pour contredire (2)), il est possible de choisir un point a_1 de A tel que $f(a_1) > 0$. De même, on peut choisir un point $a_2 \in A$ tel que $g(a_2) > 0$. Distinguons deux cas.

- Si $g(a_1) = 0$, on considère $h := f - \lambda g \in X$ pour un λ suffisament grand (par exemple $\lambda := f(a_2)/g(a_2) + 1$). On a $h(a_1) = f(a_1) > 0$ et $h(a_2) = f(a_2) - \lambda g(a_2)$ qui est < 0 vu le choix de λ (et le fait que $g(a_2) > 0$). On vient donc de construire un élément h de X qui change de signe, ce qui contredit (1).
- Si $g(a_1) \neq 0$, alors, quitte à multiplier g par une constante positive adéquate, on peut supposer que $f(a_1) = g(a_1)$. Comme $f \neq g$ (si $f = g$, il suffit de prendre $(\alpha, \beta) = (1, -1)$ pour contredire (2)), il existe un $a_3 \in A$ tel que $f(a_3) \neq g(a_3)$. Sans perte de généralité (quitte à échanger f et g), on peut supposer $f(a_3) > g(a_3)$. On considère maintenant $h := (1 - \lambda) f + \lambda g \in X$ avec λ assez grand (par exemple $\lambda := \frac{f(a_3)}{f(a_3) - g(a_3)} + 1$). On a, d'une part, $h(a_1) = f(a_1) = g(a_1) > 0$ et, d'autre part, $h(s_3) = f(a_3) - \lambda(f(a_3) - g(a_3))$ qui est < 0 vu le choix de λ. Comme dans le premier cas, on a une fonction $h \in X$ qui change de signe, ce qui contredit (1).

<u>Une autre argumentation possible</u>

Quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f - \lambda g \in X$ et par conséquent, vu qu'on suppose (1), on a forcément $f - \lambda g \geqslant 0$ ou $f - \lambda g \leqslant 0$. Autrement dit, on vient de montrer

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \geqslant \lambda g \text{ ou } f \leqslant \lambda g. \tag{3}$$

Posons

$$\lambda^* := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid f \leqslant \lambda g\}.$$

- $\lambda^* < +\infty$. En effet, comme la famille $\{f, g\}$ est libre, ça implique que $g \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe un $\bar{x} \in A$ tel que $g(\bar{x}) \neq 0$ (donc $g(\bar{x}) > 0$ vu qu'on a supposé $g \geqslant 0$.). Par conséquent, $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid f \leqslant \lambda g\} \neq \varnothing$ car si cet ensemble était vide, (3) impliquerait $f \geqslant \lambda g$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc, en particulier, $f(\bar{x}) \geqslant \lambda g(\bar{x})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ ou encore $f(\bar{x})/g(\bar{x}) \geqslant \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui est une contradiction.
- $\lambda^* > -\infty$. En effet, en prenant un $\bar{x}$ tel que $g(\bar{x}) > 0$ (dont l'existence vient d'être montrée), on a

  $$f \leqslant \lambda g \quad \Rightarrow \quad f(\bar{x}) \leqslant \lambda g(\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad \lambda \geqslant f(\bar{x})/g(\bar{x}).$$

  Par conséquent, $f(\bar{x})/g(\bar{x}) > -\infty$ est une borne inférieure de l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid f \leqslant \lambda g\}$, qui minore donc λ^*.

- Par définition de l'infimum, il existe une suite $\lambda_n \to \lambda^*$ telle que $f \leqslant \lambda_n g$. Cette dernière inégalité signifie que
$$\forall x \in A, \quad f(x) \leqslant \lambda_n g(x).$$
Pour chaque $x \in A$, on peut passer à la limite $n \to +\infty$, ce qui donne $f(x) \leqslant \lambda^* g(x)$. Donc $f \leqslant \lambda^* g$.
- Pour chaque $\lambda < \lambda^*$, on n'a *pas* que $f \leqslant \lambda g$ (sinon on contredirait le fait que λ^* est un minorant). Vu (3), ça implique que $f \geqslant \lambda g$. En passant à la limite $\lambda \to \lambda^*$ (comme au point précédent), on trouve que $f \geqslant \lambda^* g$.

En conclusion, on a trouvé un $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda^* g$. Ceci contredit le fait que les fonctions f et g sont linéairement indépendantes.

REMARQUE : La propriété est vraie sans l'hypothèse que A a au plus deux éléments (celle-ci n'est d'ailleurs pas utilisée dans les arguments ci-dessus). En effet, $\mathscr{F}(\varnothing;\mathbb{R}) \cong \{0\}$ et $\mathscr{F}(\{a\};\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ (pouvez vous le montrer ?). Dans ces deux espaces, il ne peut y avoir de sous-espace vectoriel de dimension supérieure à 1.