Mathématiques générales

Examen

(26 janvier 2013)

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculer les limites des expressions suivantes lorsque n tend vers $+\infty$, où x est un paramètre réel : /4

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n; \qquad \left(1+\frac{x}{2n}\right)^n; \qquad \left(1+\frac{x}{n}\right)^{2n}.$$

Explicitez et justifiez vos calculs.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 2. Déterminer parmi les groupes suivants ceux qui sont cycliques :

(a) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (c) $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ (d) S_5.

/6

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 3. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ la fonction donnée par $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \geqslant 0$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel.

/6

(a) Pour $B \subseteq [0, +\infty[$, déterminer $f^{-1}(B)$.

(b) Caractériser les sous-ensembles $A \subseteq [0, +\infty[$ tels que $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

(c) Caractériser les sous-ensembles $B \subseteq [0, +\infty[$ tels que $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/6

Question 4. On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Soit $p \in \mathbb{R}[x]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$, on dit que x_0 est *un zéro d'ordre n de p* si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\text{(i) } p(x_0) = 0, \quad \text{(ii) pour tout } 1 \leqslant k \leqslant n-1, \text{ on a que } p^{(k)}(x_0) = 0, \quad \text{(iii) } p^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ 5 est un zéro d'ordre 2 de $(x-5)^2$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x-x_0)^n$ divise[1] p , alors x_0 est un zéro d'ordre n de p.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si x_0 est un zéro d'ordre n de p, alors tous les n premiers coefficients du développement de Taylor de p au voisinage de x_0 sont nuls.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si x_0 est un zéro d'ordre n de p, alors $(x-x_0)^n$ divise p.

[1] Pour rappel, on dit qu'un polynôme $p_2 \in \mathbb{R}[x]$ divise un polynôme $p_1 \in \mathbb{R}[x]$ s'il existe $q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p_1 = q \cdot p_2$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/5

Question 5. Soit P_k^n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en (exactement) k sous-ensembles non-vides. Par exemple, $P_1^n = P_n^n = 1$, $P_2^3 = 3$. Montrez que

$$P_k^n = P_{k-1}^{n-1} + kP_k^{n-1}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n.$$

(*Indication* : Fixer un des n éléments.)

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 6. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f, g : E \to F$ des applications linéaires. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ pour que /6

$$\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f+g).$$

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 7.

/5

(a) En intégrant successivement l'inégalité $1 \leqslant e^x$ valable pour tout $x \geqslant 0$, montrer que

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leqslant e^x$$

pour tout réel positif x et tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire :

$$x^n e^{-x} \leqslant n! \qquad \text{et} \qquad x^n e^{-x} \leqslant \frac{(n+1)!}{x}$$

pour tout réel strictement positif x et tout entier positif n.

(c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout entier positif n, et calculer $\lim_{x\to+\infty} P(x) e^{-x}$ où P est un polynôme.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/8

Question 8. Soit $\mathscr{D} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \text{ et } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\}$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie ci-dessous, est un élément de $\mathscr{D}$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quelle que soit $f \in \mathscr{D}$, on a que $f' \in \mathscr{D}$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quelle que soit $f \in \mathscr{D}$, si f est paire[2], alors f' est impaire.

[2] Une fonction f est *paire* (resp. *impaire)* si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 8 (suite).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quelle que soit $f \in \mathscr{D}$, si f est injective, alors f' est injective.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit $T \in \mathbb{R}$, quelle que soit $f \in \mathscr{D}$, si f est périodique[3] de période T, alors f' est périodique de période T.

[3]Une fonction f est *périodique de période* T si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+T)$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \neq 0,\ \partial f(x) > 0$. Montrez que f est strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$. Il est nécessaire de justifier toutes les étapes de votre raisonnement. $/4$