Mathématiques générales

Examen (29 août 2013)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ soit l'application /4

$$f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \big(ax + b(x+y)\,,\, a(x+y) + by\big).$$

(a) Déterminer l'ensemble des $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_{a,b}$ est surjective.

(b) Même question avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $f_{a,b} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématiques générales

Examen (29 août 2013)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

/6

Question 2. On considère $\mathscr{D} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \text{ et } f \text{ est injective} \}$. Étant donnée une fonction $f \in \mathscr{D}$, on note $f^{-1} : \mathrm{Im} f \to \mathbb{R}$ l'unique fonction telle que $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $f \in \mathscr{D}$ est strictement croissante, alors f^{-1} est strictement croissante.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $f \in \mathscr{D}$ est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x) > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $f \in \mathscr{D}$ est périodique, alors f est dérivable.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 3. /4

(a) Démontrer l'inégalité suivante, pour tout couple de réels (x,y) :

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y|.$$

(b) Démontrer l'inégalité suivante, pour tout réel x :

$$\big||x-1|-|x+1|\big| \leqslant 2.$$

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 4. Soit $q \in \left]-1,1\right[$ et $n \geqslant 0$. /4

(a) Montrer que

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k = q^n \sum_{j=0}^{\infty} q^j.$$

Veillez à justifier les différentes étapes de votre raisonnement. En déduire la valeur de la série $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} q^k$.

(b) Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ une série convergente de nombres réels. Supposons qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = Mq^n.$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$a_n = Cq^n.$$

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/5

Question 5. Pour un groupe fini G on pose

$$e(G) := \min\left\{ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \;\middle|\; \forall x \in G,\ x^n = 1_G \right\}.$$

(a) Déterminer $e(S_3)$ et $e(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

(b) Montrer que $e(G)$ divise l'ordre de G.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/6

Question 6. Soit Ω un ensemble de n éléments ($n \geqslant 1$).

(a) Soit
$$X = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_k \in \{0,1\} \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, n\}$$
l'ensemble de tous les n-uplets composés de 0 et 1. Montrer que $\operatorname{card}(X) = 2^n$.

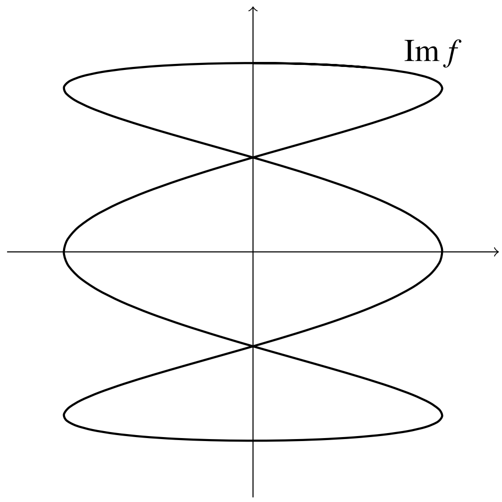
(b) Définir une bijection entre l'ensemble X de (a) et $\mathscr{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω. Par conséquent, $\operatorname{card}\big(\mathscr{P}(\Omega)\big) = 2^n$.

(c) Une *2-partition* de Ω est donnée par deux sous-ensembles non-vides A et B de Ω tels que $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$. Trouver le nombre de 2-partitions de Ω. (*Indication* : Utiliser le résultat de (b)).

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 7. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(\sin(3t), \cos t\big)$ dont l'image est représentée ci-dessous. Donnez une équation cartésienne de la tangente à l'image de f au point $f(\pi/3)$. Représentez cette tangente sur le graphique. Le résultat est-il celui attendu ? Expliquez.

$/5$



Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/4

Question 8. Dans chacun des cas suivants, donnez (si possible) un polynôme qui satisfait la propriété donnée. Justifiez votre réponse.

(a) Un polynôme p_1 à coefficients réels de degré n possédant au moins $n+1$ racines (dans $\mathbb{C}$).

(b) Un polynôme p_2 de degré 2, à coefficients entiers, qui possède $\sqrt{2}$ comme racine.

(c) Un polynôme p_3 de degré 3, à coefficients réels dont toutes les racines sont dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

(d) Un polynôme p_4 de degré 4, à coefficients réels dont les seules racines sont $\mathbf{i}$, $2\mathbf{i}$ et $3\mathbf{i}$.

Mathématiques générales

Examen (29 août 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 9. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Montrez qu'il existe une suite $(x_n) \subseteq \,]0, +\infty[$ telle que $x_n \to 0$ et $\forall n,\ \partial_x f(x_n) > 0$. $/4$