Mathématiques générales

Examen (5 novembre 2013)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E tel que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus V$ et $f(V) \subseteq V$. Montrer que $V = \mathrm{Ker}(f)$. /4

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/6

Question 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dira que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la propriété P_1 si et seulement si la propriété suivante est satisfaite :

$$\forall\varepsilon\in\,]0,1[\,,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant n_0\Rightarrow |x_n|<\varepsilon.$$

On dira que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la propriété P_2 si et seulement si la propriété suivante est satisfaite :

$$\forall\varepsilon\in[0,+\infty[\,,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant n_0+5\Rightarrow |x_n|\leqslant\varepsilon.$$

(a) Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ».

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait P_1.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait P_2.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait P_2 alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/6

Question 3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln|\ln x|$. Répondez aux questions suivantes en détaillant vos calculs et en justifiant votre démarche.

(a) Déterminez le domaine de f.

(b) La fonction f est-elle dérivable sur son domaine ? Si non, dites en quels points elle l'est.

(c) Déterminez l'ensemble sur lequel f est croissante. Celui-ci doit être écrit comme une union disjointe d'intervalles.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 4. On note $\mathscr{D} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\}$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f \in \mathscr{D}$. Si f est dérivable deux fois, alors f est dérivable trois fois.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f \in \mathscr{D}$. Si f est continue, strictement croissante, telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f \in \mathscr{D}$. Si f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f est continue sur $]a, b[$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe un polynôme à coefficients réels, noté $p(x)$, tel que $p(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 5. $/5$

(a) Prouvez que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{1+\varepsilon x+\frac{1}{2}\varepsilon^2 x^2} = 0$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

(b) Prouvez que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = 0$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

Mathématiques générales

Examen (5 novembre 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 6. Soit G un groupe fini cyclique d'ordre n. On rappelle que tous les sous-groupes de G sont cycliques. $/4$

(a) Soit $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle$. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\operatorname{ord}(x^m) = \frac{n}{\operatorname{pgcd}(n,m)}$.

(b) Soit $d \geqslant 1$ entier tel que $d \mid n$. Montrer que G contient un unique sous-groupe d'ordre d.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 7.

/4

(a) Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ avec $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{N} \supsetneqq f(\mathbb{N}) \supsetneqq f^2(\mathbb{N}) \supsetneqq f^3(\mathbb{N}) \supsetneqq \cdots$$

Ici, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc.

(b) Soit X un ensemble fini. Montrer qu'il n'y a pas de fonction $f : X \to X$ avec $\mathrm{Dom}(f) = X$ telle que

$$X \supsetneqq f(X) \supsetneqq f^2(X) \supsetneqq f^3(X) \supsetneqq \cdots$$

Mathématiques générales

Examen (5 novembre 2013)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

/6

Question 8. Soit B un ensemble non vide et $X \subseteq B$. Soit L un sous-ensemble de $\mathscr{P}(B)$ (l'ensemble des parties de B). On dit que L est *complet par rapport à X* s'il satisfait :

$$\forall A \in \mathscr{P}(B), \quad \big(A \in L \Leftrightarrow X \subseteq A\big). \tag{1}$$

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de L.

(a) Prouvez que $\bigcap_{i\in I} A_i \in L$.

(b) Prouvez que $\bigcup_{i\in I} A_i \in L$.

(c) Prouvez que si $A \in L$ et $\tilde{A} \supseteq A$, alors $\tilde{A} \in L$.

(d) Déterminez le(s) sous-ensemble(s) L de $\mathscr{P}(B)$ complets par rapport à $\varnothing$.

(e) Pour quels sous-ensembles X de B existe-t-il un sous-ensemble L de $\mathscr{P}(B)$, complet par rapport à X et vérifiant $\forall A \in \mathscr{P}(B)$, $\big(A \in L \Leftrightarrow \complement A \notin L\big)$ (où $\complement A = B \setminus A$).

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 8 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.