Mathématiques générales

Examen (6 janvier 2014)

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Il est bien connu que /2

$$3^2 = 1 + 3 + 5.$$

Voici une preuve sans mots :

$$\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{array}$$

Déduire de la même façon une formule pour n^2 avec $n \geqslant 1$ arbitraire (une preuve rigoureuse n'est pas demandée). Expliquez votre démarche.

Mathématiques générales

Examen (6 janvier 2014)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 2. Soient E, F, G des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires telles que f est injective et g est surjective. Montrer que $g \circ f$ est bijective si et seulement si $F = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

/4

Mathématiques générales

Examen (6 janvier 2014)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 3. Soit $\{A_m \mid m \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}\}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On suppose que /4

(i) pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k, k' \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, on a

$$A_{2^n+k} \subseteq A_{2^n+k'} \quad \text{si et seulement si} \quad k \leqslant k';$$

(ii) il existe un $n_0 \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $A_{2^n} \subseteq A_{2^{n_0}}$.

Sous ces hypothèses,

(a) calculer $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\{0,1,\ldots,2^n-1\}} A_{2^n+k}$ en justifiant votre réponse ;

(b) prouvez que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\{0,1,\ldots,2^n-1\}} A_{2^n+k} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}} A_{2^m-1}$.

Mathématiques générales

Examen (6 janvier 2014)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 4. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des nombres réels. /3

(a) Définir la convergence (stricte) de la *suite* $(a_n)_{n \geqslant 1}$.

(b) Définir la convergence (stricte) de la *série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(c) Montrer que si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge alors $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 5. Donner un exemple explicite d'un ensemble muni d'une relation d'équivalence dont toutes les classes d'équivalence sont infinies et avec un nombre infini de celles-ci. Justifiez vos affirmations. /3

Question 6. On a dans un plan deux points A et B distants de 5 cm. Combien de droites de ce plan sont en même temps à une distance de 2 cm de A et de 3 cm de B ? Justifiez vos affirmations. /3

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/4

Question 7. Soit A un anneau, on note $A[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans A. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $p \in \mathbb{C}[x]$. Le polynôme p a un nombre fini de racines distinctes.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $p \in \mathbb{R}[x]$. Si le degré de p est impair, alors p possède un nombre impair de racines réelles distinctes.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $p \in \mathbb{Z}[x]$. Si le degré de p est un, alors l'ensemble des racines de p est toujours un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{Q}$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $p \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[x]$. Si le degré de p est un, alors p ne possède jamais deux racines distinctes.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 8. On note $\mathscr{C} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \text{ et } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\}$. Pour $f, g \in \mathscr{C}$, on dira que *la fonction g s'élève au dessus de la fonction f* si et seulement si la propriété ci-dessous est satisfaite :

/5

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ \exists x_2 \in \mathbb{R}, \quad (x_1 \leqslant x_2) \wedge \big(f(x_1) < g(x_2)\big).$$

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $g \in \mathscr{C}$, si g s'élève au dessus de la fonction identité (i.e. la fonction qui envoie x sur x), alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $f, g \in \mathscr{C}$. Si f est croissante et g s'élève au dessus de f, alors g est croissante.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $f, g \in \mathscr{C}$, si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, g est croissante et g s'élève au dessus de f, alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 9. Soient X, Y et Z des ensembles, $f : X \to Y$ et $g : X \to Z$ des applications (c.-à-d. que $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) = X$). /4

(a) Soit g bijective. Montrer qu'il existe une unique application $h : Z \to Y$ (avec $\mathrm{Dom}(h) = Z$) telle que $h \circ g = f$. Soyez précis dans vos justifications.

(b) Montrer par un contre-exemple que l'assertion dans (a) est fausse en général si g est supposée injective mais pas forcément surjective.

(c) Montrer par un contre-exemple que l'assertion dans (a) est fausse en général si g est supposée surjective mais pas forcément injective.

Mathématiques générales

Examen (6 janvier 2014)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 10. $/4$

(a) Soient G, H des groupes finis et $(g,h) \in G \times H$. Montrer que $\operatorname{ord}(g,h) = \operatorname{ppcm}(\operatorname{ord} g, \operatorname{ord} h)$.

(b) Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 12 dans $S_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?