Mathématiques générales

Examen (23 août 2014)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient K un corps et $a, b \in K$. Pour quelles valeurs de a et de b les matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sont-elles conjuguées ? /3

Mathématiques générales

Examen (23 août 2014)

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 2. On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Décrire explicitement les ensembles ci-dessous. Justifiez votre réponse. $/6$

(a) $E_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p \text{ est dérivable au moins deux fois}\}$;

(b) $E_2 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p \text{ est périodique}\}$;

(c) $E_3 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(\mathbf{i}) = 0\}$ (où $\mathbf{i}^2 = -1$) ;

(d) $E_4 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0 \Rightarrow p(1) = 0\}$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/5

Question 3. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant a_n \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant b_n \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad a_n b_n \to 1 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Que pouvez-vous dire des suites (a_n) et (b_n) ? Veillez à la qualité de votre justification.

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : BAC 2 math

/4

Question 4. Soit la fonction $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ donnée[1] par

$$f(p,n) = p + \frac{1}{n}, \quad p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction f est-elle

(a) injective ?

(b) surjective ?

(c) bijective ?

Justifiez en détail votre réponse.

[1]Pour rappel, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 5. On note $\mathscr{I}$ l'ensemble des intervalles ouverts et bornés de $\mathbb{R}$, i.e. $I \in \mathscr{I}$ si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. On note $\mathscr{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\}$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses. /6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $I \in \mathscr{I}$, $f \in \mathscr{F}$ alors $f(I) \in \mathscr{I}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $I \in \mathscr{I}$, $f \in \mathscr{F}$ et f est continue alors $f(I) \in \mathscr{I}$.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 5 (suite).

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $I \in \mathscr{I}$, $f \in \mathscr{F}$ et f est strictement croissante alors $f^{-1}(I) \in \mathscr{I}$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $I \in \mathscr{I}$, $f \in \mathscr{F}$ et f est continue alors $f^{-1}(I) \in \mathscr{I}$.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 6. Soit S_n le groupe des permutations sur n éléments et soit d une fonction de $S_n \times S_n$ dans $\mathbb{R}$ définie comme suit : /5

$$d(f,g) = \operatorname{card}\bigl(\{i \mid f(i) \neq g(i)\}\bigr).$$

Montrer que d est une distance[2] sur S_n. Quelle est la cardinalité de l'image de d (en fonction de n) ? Justifiez vos réponses.

[2]Rappelons qu'une distance d sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que, pour tous $x, y, z \in X$, (i) $d(x,y) \geqslant 0$, (ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (iii) $d(x,y) = d(y,x)$ et (iv) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 7. Soit G un groupe fini. On suppose que pour tout entier $n \geqslant 1$, G contient au plus un élément d'ordre n. Montrer que $G = \{1_G\}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. /5