Mathématiques générales

Examen (4 novembre 2014)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle réel ($a, b \in \mathbb{R}$), $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $k \in \mathbb{R}^{>0}$ un réel strictement positif. On dit que f est *k-lipschitzienne* sur I si et seulement si $/7$

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

S'il existe $k \in \mathbb{R}^{>0}$ tel que f est k-lipschitzienne sur I, on dit que f est *lipschitzienne* sur I. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifez vos réponses.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f(x) = x^2$ est 3-lipschitzienne sur $I = [0,1]$.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 1 (suite).

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est dérivable sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est lipschitzienne sur I, alors f est continue.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est continuement dérivable[1] sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

[1] I.e. la dérivée de f existe et est continue.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g : E \to E$ des applications linéaires. Montrer que $\dim f^{-1}(\operatorname{Ker} g) + \dim g(\operatorname{Im} f) = \dim E$. /5

Mathématiques générales

Examen (4 novembre 2014)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 3. Soit X un ensemble et A, A_i $(i \in I)$, B_j $(j \in J)$ des sous-ensembles de X.

/4

(a) Montrer que

$$A \cup \Big(\bigcap_{j \in J} B_j \Big) = \bigcap_{j \in J} (A \cup B_j).$$

(b) A-t-on également que

$$\Big(\bigcap_{i \in I} A_i \Big) \cup \Big(\bigcap_{j \in J} B_j \Big) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)\ ?$$

Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/6

Question 4. Soit $f : I \to I$ une fonction où I est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $0 < k < 1$ tel que f soit k-lipschitzienne sur I (voir question 1). Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad x_{n+1} = f(x_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Vérifiez que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n |x_1 - x_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Déduisez-en que, pour tout $n, \ell \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+\ell} - x_n| \leqslant k^n \frac{1-k^\ell}{1-k} |x_1 - x_0|.$$

(c) Montrez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera x^* la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Montrez que f admet un unique point fixe dans I.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 5. Déterminez si les affirmations suivantes à propos d'une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ sont vraies ou fausses. Justifez vos réponses. /6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $n < k$, alors L ne peut pas être surjective.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $n < k$, alors L est nécessairement injective.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $n = k = 1$ et L n'est pas injective, alors L est identiquement nulle.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $n = k$ et L est surjective, alors L est inversible.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 6. Soit $x > 0$ un nombre réel. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par /4

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \quad n \geqslant 0.$$

Déterminer tous les $n \geqslant 1$ tels que $a_{n-1} \leqslant a_n$. En déduire $\max\limits_{n\geqslant 0} a_n$.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 7. Pour tout entier $k \geqslant 1$ soit $z_k := e^{\mathbf{i}2\pi/k} \in \mathbb{C}^\times$. On rappelle que l'ordre de z_k dans le groupe $\mathbb{C}^\times$ est k. Soient $n, m \geqslant 1$ entiers. /5

(a) Montrer que si $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier qui divise nm, alors p divise n ou p divise m.

(b) Montrer que $\operatorname{pgcd}(n,m) = 1$ si et seulement si $\operatorname{pgcd}(nm, n+m) = 1$.

(c) Montrer que $\operatorname{ord}(z_n z_m) = nm$ si et seulement si $\operatorname{pgcd}(n,m) = 1$.