Mathématiques générales

Examen (5 janvier 2015)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient X un ensemble et A un sous-ensemble de X. Soit /6

$$\mathscr{C} := \{C \subseteq X \mid A \subseteq C \text{ ou } C \cap A = \varnothing\}.$$

(a) Montrer que si $C \in \mathscr{C}$ alors $X \setminus C \in \mathscr{C}$.

(b) Montrer que si $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$ alors $C_1 \cup C_2 \in \mathscr{C}$.

On définit l'application $J : \mathscr{C} \to \mathscr{P}(X \setminus A)$ par

$$J(C) := C \setminus A,$$

où $\mathscr{P}(Y)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble Y.

(c) Pour tout sous-ensemble B de $X \setminus A$, déterminer $J^{-1}(\{B\})$ et $\operatorname{card}(J^{-1}(\{B\}))$.

(d) L'application J, est-elle surjective ? Est-elle injective ? Est-elle bijective ?

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématiques générales

Examen (5 janvier 2015)

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 2. Soit $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application $\mathbb{R}$-linéaire telle que $f(S) \subseteq S$. Montrer que f est surjective. $/4$

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 3. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous : $/8$

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } -1 \leqslant x < 0, \\ \mathrm{e}^{-x}\sin(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4\pi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En fonction de $n \in \mathbb{N}$,

(a) déterminez l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ en lesquels f_n est continue ;

(b) déterminez l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ en lesquels f_n est dérivable ;

(c) déterminez (si elle existe) la valeur maximum de f_n et l'ensemble des points où ce maximum est atteint (seulement si le maximum existe).

Justifiez en citant clairement les résultats de Bac 1 que vous utilisez (tout en restant concis).

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 4. /4

(a) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles fermés et bornés de $\mathbb{R}^N$ telle que toute intersection finie de F_n soit non-vide. Montrez que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

(b) Cette propriété reste-t-elle vraie si on demande seulement que les F_n soient fermés (et donc pas nécessairement bornés) ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

/6

Question 5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Étant donné une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on note $(x_n^f)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombre réels définie par $x_n^f = x_{f(n)}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ et si f est strictement croissante, alors $(x_n^f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si f est une surjection, alors $(x_n^f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x^\star \in \mathbb{R}$ et si f est une bijection, alors $(x_n^f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x^\star$.

Justifiez ci-dessous chacune de vos réponses.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

/4

Question 6. Soit $n \geqslant 1$ entier.

(a) Montrer que $P_n := \left\{\sigma \in S_n \,\middle|\, \forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ \sigma(k) - k \text{ est pair}\right\}$ est un sous-groupe de S_n.

(b) Soit $p(n) := (\frac{n}{2})!^2$ si n est pair, $(\frac{n+1}{2})!\,(\frac{n-1}{2})!$ si n est impair. Montrer que $p(n)$ divise $n!$.