Mathématiques générales

Examen (18 août 2015)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles, i.e., $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{s : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{Dom}(s) = \mathbb{N}\}$. On sait que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel (vous ne devez pas le montrer). On considère l'application linéaire $L : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $L(s)(n) = s(n+1)$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ (vous ne devez pas montrer que L est une application linéaire). Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses. $/5$

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ L'application linéaire L est surjective.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 1 (suite).

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ L'application linéaire L est injective.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ L'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension finie.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/4

Question 2. Soient X un ensemble et A et B deux sous-ensembles de X. La *différence symétrique* de A et B est définie par

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

(a) Soit $A \subseteq X$ fixé. Existe-t-il un ensemble $B \subseteq X$ tel que

$$A\Delta B = A \text{ ?}$$

Si oui, trouver tous les ensembles B avec cette propriété.

(b) Montrer que, pour tous $A, B \subseteq X$,

$$\complement A \Delta \complement B = A\Delta B.$$

Remarque : Les preuves bien rédigées et concises sont particulièrement appréciées.

Mathématiques générales

Examen (18 août 2015)

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 3. Soit l'application $f : \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} : x \mapsto 3x$. /4

(a) Montrer que f est un morphisme de groupe bijectif.

(b) Déterminer l'ordre de f dans le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Mathématiques générales

Examen (18 août 2015)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 4. Le but de cette question est de prouver (sans utiliser la compacité) qu'il n'existe pas de bijection *continue* de l'intervalle ouvert $]0,1[$ dans l'intervalle fermé $[0,1]$. /5

(a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit I l'intervalle défini par $\left[f(a), f(b)\right]$ si $f(a) \leqslant f(b)$, et par $[f(b), f(a)]$ si $f(b) < f(a)$. Montrez que quel que soit $y \in I$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

(b) Soit $f :]0,1[\to [0,1]$ une surjection continue, en utilisant le résultat précédent, prouvez que f ne peut pas être injective.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 5. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les sous-espaces vectoriels de E stables par tous les endomorphismes de E. /4

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

/4

Question 6. Soient X un ensemble et A un sous-ensemble de X. La *fonction indicatrice* $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ de A est définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient Y un ensemble et $f : Y \to X$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications.

(a) Définir l'image réciproque $f^{-1}(A)$ pour $A \subseteq X$.

(b) Montrer que

$$\mathbb{1}_A \circ f = \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}.$$

(c) Montrer qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ et $B, C \subseteq X$ tels que

$$g \circ \mathbb{1}_A = b\mathbb{1}_B + c\mathbb{1}_C.$$

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non-bornée si et seulement s'il existe une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|y_n| \to +\infty$. /4