Problèmes de Mathématique

Examen (7 janvier 2016)

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /5

(a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

(b) Il est connu qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \Bigl(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\Bigr) = \gamma.$$

En déduire, avec (a), la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \Bigl(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\Bigr)$.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Problèmes de Mathématique

Examen (7 janvier 2016)

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

Question 2. Soient E, F des K-espaces vectoriels de dimension finie et V un sous-espace vectoriel de E. /5

(a) Soit $f : V \to F$ une application linéaire. Montrer qu'il existe une application linéaire $g : E \to F$ dont la restriction à V est f.

(b) Déterminer, en fonction de $\dim E$, $\dim F$ et $\dim V$, la dimension de l'espace vectoriel des applications linéaires $E \to F$ s'annulant sur V.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 3. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F. /4

(a) Donnez la définition en ε-δ de la continuité de f sur E.

(b) Soient $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$ et $(F, \|\cdot\|_F) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Au moyen de la définition précédente, étudiez la continuité de la fonction f définie par $f(x,y) = x \cdot y$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$).

Problèmes de Mathématique

Examen (7 janvier 2016)

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 4. /4

(a) Soit G un groupe. Pour $x, y \in G$ on pose $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $x = y^{-1}$. Montrer que $\sim$ définit une relation d'équivalence sur G.

(b) Montrer que tout groupe fini d'ordre pair contient au moins un élément d'ordre deux.

Problèmes de Mathématique

Examen (7 janvier 2016)

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 5. Soit X un ensemble. Montrer les assertions suivantes : /4

(a) Il existe un *unique* sous-ensemble A de X tel que

$$\text{pour tout sous-ensemble } B \text{ de } X, \quad A \cup B = B.$$

(b) Pour tout sous-ensemble A de X il existe un *unique* sous-ensemble B de X tel que

$$\text{pour tout sous-ensemble } C \text{ de } X, \quad C \cap A = C \setminus B.$$

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

Question 6. Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses avec précision et détails.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe une bijection $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_1 n'est pas continue en x.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe une application linéaire $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas continue.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe une application linéaire continue $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est injective et non surjective.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe deux *ensembles* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ et une bijection continue $f_4 : A \to B$ telle que $f_4^{-1} : B \to A$ n'est pas continue.