Problèmes de Mathématique

Examen (17 août 2016)

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit A un anneau, on note $A[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans A. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses. $/5$

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Tout polynôme de $\mathbb{Q}[x]$ possède un nombre fini de racines.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $p \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme de degré 2. Si p ne possède que des racines complexes (non réelles) alors p est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $p \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme de degré 4. Si p ne possède que des racines complexes (non réelles) alors p est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $p \in \mathbb{Z}[x]$. Si le degré de p est un, alors l'ensemble des racines de p est toujours un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{Q}$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $p \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[x]$. Si p un polynôme non nul de degré n, alors p possède au plus n racines distinctes dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 2. Soit X un ensemble et $A, C \subseteq X$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

/4

(a) pour tout sous-ensemble B de X, $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$;

(b) $A \cap C = \varnothing$.

Problèmes de Mathématique

Examen (17 août 2016)

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 3. Soient E un K-espace vectoriel et $V_1, V_2 \subseteq E$ des sous-espaces vectoriels tels que $E = V_1 \oplus V_2$. Pour $i = 1, 2$ soient $F_i = \{f \in \mathrm{End}_K(E) \mid \mathrm{Im}(f) \subseteq V_i\}$. Montrer que $\mathrm{End}_K(E) = F_1 \oplus F_2$. $/4$

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 4. Donnez si possible une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f^{-1} n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. Justifiez votre réponse. $/4$

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

/6

Question 5. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction. Une fonction $g : [0,1] \to [0,1]$ est appelée *conjuguée* à f s'il existe une fonction bijective $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ telle que φ et φ^{-1} sont continues et

$$g \circ \varphi = \varphi \circ f.$$

Soit g conjuguée à f.

(a) Montrer que $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. En déduire que si f est continue alors g l'est également.

(b) Soit maintenant g continue. Peut-on conclure que f est continue ?

Une fonction $g : [0,1] \to [0,1]$ est appelée *semi-conjuguée* à f s'il existe une fonction surjective $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ telle que φ est continue et

$$g \circ \varphi = \varphi \circ f.$$

(c) Montrer que la continuité de g n'implique pas celle de f si g est semi-conjuguée à f.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 6.

/5

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Supposons que f soit croissante sur $]-\infty, 0[$ ainsi que sur $]0, +\infty[$. Montrez que f est croissante sur tout $\mathbb{R}$.

(b) La propriété énoncée en (a) reste-t-elle vraie sous les mêmes hypothèses sauf qu'on ne suppose plus que f soit forcément continue ?

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 7. Soit G un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini. $/4$