Problèmes de Mathématique

Examen (13 janvier 2017)

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note D_1 (resp. D_2) la droite passant par les points $(1,2,3)$ et $(3,2,1)$ (resp. passant par les points $(1,0,0)$ et $(2,0,0)$). $/6$

(a) Donnez une équation paramétrique de la droite D_1 (même question pour la droite D_2).

(b) La droite D_1 est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

(c) Montrez que la droite D_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(d) Calculez le noyau de l'application linéaire $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $L(x_1,x_2,x_3) = (x_2,x_3)$.

(e) Vu que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel, on sait que $\big(\mathbb{R}^3,+,(0,0,0)\big)$ est un groupe commutatif. On sait également que si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, E est un sous-groupe normal de $\big(\mathbb{R}^3,+,(0,0,0)\big)$. Il est donc légitime de considérer le quotient du groupe $\mathbb{R}^3$ par le sous-groupe normal E, noté $\mathbb{R}^3/E$. On sait que $\mathbb{R}^3/E$ est un groupe. On peut montrer (vous ne devez pas le faire) que $\mathbb{R}^3/E$ est aussi un espace vectoriel, où le produit par un scalaire est défini par $\lambda \cdot [(a,b,c)] = [\lambda \cdot (a,b,c)]$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $[(a,b,c)] \in \mathbb{R}^3/E$ représente la classe de l'élément (a,b,c).

Dans le cas où $E = D_2$, calculez la dimension de $\mathbb{R}^3/D_2$.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 2. Soit X un ensemble et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de sous-ensembles de X, c'est-à-dire que, pour tout $n \geqslant 1$, $A_{n+1} \subseteq A_n$. /5

(a) Montrez qu'il existe une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-ensembles de X telle que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k.$$

(b) Montrez que si

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \varnothing$$

alors il existe une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-ensembles de X qui sont deux-à-deux disjoints et telle que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k.$$

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 3. Soit $C(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit l'application /5

$$\varphi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto \varphi(f) := \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xf(x). \end{cases}$$

(a) Montrer que φ est linéaire.

(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(c) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \{g \in C(\mathbb{R}) \mid g(0) = 0 \text{ et } g \text{ est dérivable en } 0\}$.

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 4. On considère les deux ensembles d'*applications* ci-dessous /5

$$A = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ est continue sur } \mathbb{R},\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \right\},$$
$$B = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ est 1-périodique sur } \mathbb{R} \right\}.$$

On note $C := A \cap B$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Quel que soit $f \in A$, l'image de f est bornée. (Pour rappel, un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}$ est borné si et seulement s'il existe a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $X \subseteq [a,b]$.)

(b) Quel que soit $f \in A$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(c) Quel que soit $f \in B$, si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Quel que soit $f \in C$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 5. Soient $a, b \in \,]0, +\infty[$. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une constante C telle que, quels que soient $x, y \in [0, +\infty[$, on a /5

$$x^a y^b \leqslant C(x^{a+b} + y^{a+b}). \tag{1}$$

(a) Commencez par montrer que, si (x, y) satisfait (1), alors c'est aussi le cas pour $(\lambda x, \lambda y)$ quel que soit $\lambda > 0$.

(b) Établissez ensuite que, sans perte de généralité, il suffit de prouver (1) pour $y = 1$.

(c) En examinant le comportement asymptotique des deux membres lorsque $x \to +\infty$ et en faisant usage de la compacité, finissez l'argument.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

/7

Question 6. Pour $x \in \mathbb{R}$, on rappelle que la partie entière inférieure $\lfloor x \rfloor$ est définie par $\lfloor x \rfloor = \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant x\}$.

(a) Donner une preuve directe du fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \tfrac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor. \tag{2}$$

(b) Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit définie par

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \tfrac{k}{n} \rfloor \right) - \lfloor nx \rfloor, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Montrer que f est $\frac{1}{n}$-périodique.

(ii) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{n}[$, $f(x) = 0$.

(iii) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \tfrac{k}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor \tag{3}$$

(ce qui généralise l'assertion (2)).

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Problèmes de Mathématique

Examen (13 janvier 2017)

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 7. Soit G le groupe des applications bijectives de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (la loi du groupe étant la composition). Soit l'ensemble $\quad$ /5

$$H := \left\{ f \in G \;\middle|\; \exists a > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - x| \leqslant a \right\}.$$

(a) Montrer que H est un sous-groupe de G.

(b) Donner un exemple d'élément continu (pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$) d'ordre 2 dans G. Est-il dans H ?

(c) Donner un exemple d'élément d'ordre 2 dans H. Est-il continu ?