Problèmes de Mathématique

Examen (31 mai 2017)

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. $/6$

(a) Donnez (si possible) une équation paramétrique d'une droite passant par les points $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(1,1,0)$. Si une telle droite existe, déterminez s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) Donnez (si possible) une équation paramétrique d'une droite passant par les points $(1,1,1)$, $(2,2,2)$ et $(3,3,3)$. Si une telle droite existe, déterminez s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(c) Donnez (si possible) une équation paramétrique d'une droite passant par les points $(2,1,1)$, $(3,2,2)$ et $(4,3,3)$. Si une telle droite existe, déterminez s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(d) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En fonction de la dimension de V, donnez une équation caractérisant V et décrivez-le géométriquement (en fonction de l'équation donnée).

Nom :	
Prénom :	
Section :	Bloc 2 math

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

/6

Question 2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient U, V, W des sous-espaces vectoriels de E, $f, g \in \mathrm{End}_K(E)$, et $u \in E$. Déterminez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en donnant une preuve si l'assertion est vraie et en fournissant un contre-exemple si elle est fausse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(U \cap V) + W = (U + W) \cap (V + W)$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $E = V \oplus W$ et $u \notin V$ alors $u \in W$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $f \circ g = \mathrm{id}_E$ alors $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Problèmes de Mathématique

Examen (31 mai 2017)

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

Question 3. Soient $a = (a_k), b = (b_k) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Le but de cet exercice est de donner une preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (différente de celle vue en bloc 1) : /5

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

(a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}.$$

(b) Utilisez (a) pour prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz. (INDICATION : $\alpha_k = \frac{a_k}{|a|_2}$.)

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

/6

Question 4. On considère le polynôme $p(x) = 1 + 2x^3 + x^6$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, justifiez votre réponse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si on considère $p \in \mathbb{C}[x]$, on a que p possède six racines complexes distinctes.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si on considère $p \in \mathbb{R}[x]$, on a que p ne possède aucun facteur irréductible de degré 2 (dans $\mathbb{R}[x]$).

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si on considère $p \in \mathbb{Q}[x]$, on a que p possède un facteur irréductible de degré 4 (dans $\mathbb{Q}[x]$).

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

/6

Question 5. Soit X un ensemble et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de sous-ensembles de X, c'est-à-dire que, pour tout $n \geqslant 1$, $A_n \subseteq A_{n+1}$.

(a) Montrez qu'il existe une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-ensembles de X telle que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

(b) La suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ dans (a) est-elle unique pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$? Donnez une preuve ou un contre-exemple.

(c) Montrez qu'il existe une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-ensembles de X qui sont deux-à-deux disjoints et telle que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

(d) La suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ dans (c) est-elle unique pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$? Donnez une preuve ou un contre-exemple.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

/4

Question 6. Soient K un corps et $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout $\sigma \in S_n$, on définit la matrice $M(\sigma) := (\sigma_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(K)$ avec $\sigma_{i,j} = 1$ si $\sigma(j) = i$ et $\sigma_{i,j} = 0$ sinon.

(a) Montrez que $M(\sigma\tau) = M(\sigma)M(\tau)$ pour tous $\sigma, \tau \in S_n$.

(b) Montrez que $M(\sigma)$ est inversible pour tout $\sigma \in S_n$.

(c) Montrez que $GL_n(K)$ contient un sous-groupe isomorphe à S_n.

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

/4

Question 7. Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. On dit que $i \in E_n$ est un *carré d'entier* s'il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que $i = z^2$. Autrement dit, i est un carré d'entier si et seulement si l'équation $X^2 - i$ a une solution $z \in \mathbb{Z}$. Posons $C_n := \{i \in E_n \mid i \text{ est un carré d'entier}\}$.
Soit S_n le groupe des permutations de E_n. Considérons la propriété suivante sur un $p \in S_n$:

$$\forall i \in E_n,\ (i \in C_n \Rightarrow p(i) \in C_n). \tag{1}$$

- Exprimez en bon français la propriété (1).
- Prouvez que si p vérifie (1), alors

$$\forall i \in E_n, (i \notin C_n \Rightarrow p(i) \notin C_n).$$

- Prouvez que p vérifie (1) ssi

$$\forall i \in E_n, (i \in C_n \Leftrightarrow p(i) \in C_n).$$