Problèmes de Mathématique

Examen (18 août 2017)

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. $/6$

(a) Déterminez combien de plans passent par les points $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$. Parmi ces plans, déterminez ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminez combien de plans passent par les points $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,2,0)$. Parmi ces plans, déterminez ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminez combien de plans passent par les points $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,2,0)$ et $(0,0,3)$.

(d) Donnez (si possible) une équation paramétrique d'un plan passant par les points $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

(e) Donnez (si possible) une équation cartésienne d'un plan passant par les points $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ et $(1,1,1)$.

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

Question 2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $f : E \to E$ une application linéaire, et V un sous-espace vectoriel de E. /6

(a) Montrer que si $V \subseteq f(V)$ alors $V = f(V)$.

(b) Est-il vrai que $f(V) \subseteq V$ implique $V = f(V)$?

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

/6

Question 3. Soit X un ensemble fini. Pour $A, B \subseteq X$ on définira

$$d(A,B) := \operatorname{card}(A \,\Delta\, B),$$

où

$$A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

et $\operatorname{card}(A)$ désigne le cardinal de A.

(a) Montrer que pour tous les $A, B, C \subseteq X$, les assertions suivantes sont satisfaites :

$$d(A,B) = d(B,A), \tag{1}$$
$$d(A,B) = 0 \;\Leftrightarrow\; A = B, \tag{2}$$
$$d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C). \tag{3}$$

(b) Soit $\operatorname{card}(X) \geqslant 2$. Montrer que l'assertion suivante est *fausse* : pour tous $A, B, C \subseteq X$ on a

$$d(A,C) \leqslant \max\{d(A,B),\, d(B,C)\}.$$

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 4. Soit p un nombre premier. Soit

/6

$$G := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } z^{p^n} = 1\}.$$

(a) Montrer que G est un sous-groupe infini de $\mathbb{C}^\times$.

(b) Soit $G_n := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^{p^n} = 1\}$. Montrez que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ et que (G_n) est une suite croissante, c'est-à-dire que $\forall n,\ G_n \subseteq G_{n+1}$.

(c) Pour tout $z \in G$, montrez qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que z génère G_n.

(d) Montrer que tout sous-groupe strict de G est fini.

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

/5

Question 5. Soit X un ensemble et $f : X \to X$ une application. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$f^n = f \circ \cdots \circ f \quad \text{(composition } n \text{ fois), si } n \geqslant 1;$$
$$f^0 = I,$$

où $I : X \to X$ désigne l'identité $I(x) = x$, $x \in X$.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, une application *linéaire*. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$(I - f) \circ \Big(\sum_{n=0}^{N} f^n\Big) = I - f^{N+1}. \tag{$*$}$$

Justifiez bien chaque étape de votre preuve.

(b) Donner un exemple dans le cas $m = 1$ et $N = 1$ pour montrer que l'identité $(*)$ est fausse en générale si f n'est pas linéaire.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 6. On considère le polynôme $p(x) = x - 2x^4 + x^7$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, justifiez votre réponse. /6

(a) Si on considère $p \in \mathbb{C}[x]$, on a que p possède six racines complexes distinctes.

(b) Si on considère $p \in \mathbb{R}[x]$, on a que p ne possède aucun facteur irréductible de degré 2 (dans $\mathbb{R}[x]$).

(c) Si on considère $p \in \mathbb{Q}[x]$, on a que p possède un facteur irréductible de degré 4 (dans $\mathbb{Q}[x]$).

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

/4

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. On note f^+ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$. Montrez que f^+ est dérivable sur l'ensemble $\big\{x \in \mathbb{R} \bigm| f(x) \neq 0\big\}$.