Problèmes de Mathématique

Examen (17 janvier 2018)

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ différent du vecteur nul. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit /5

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \text{ est orthogonal à } v\}.$$

On note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotation d'angle θ autour de l'axe z dans le sens trigonométrique. On définit ensuite deux ensembles : $B = f(A)$ et $C = A \cap B$. Parmi les affirmations ci-dessous, déterminez celle qui est correcte. La longueur des arguments utilisés sera évaluée.

(a) Quel que soient $v \in \mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$, C est un cercle de rayon 1.

(b) Quel que soient $v \in \mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{R}^+$ tel que C est un cercle de rayon r.

(c) Quel que soient $v \in \mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$, C est un disque de rayon 1.

(d) Quel que soient $v \in \mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{R}^+$ tel que C est un disque de rayon r.

(e) Quel que soient $v \in \mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}^3$.

(f) Aucune des affirmations ci-dessus n'est correcte.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

/5

Question 2. Soit E un K-espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire vérifiant la propriété :

$$\text{Pour tout sous-espace vectoriel } V \subseteq E,\ f(V) = f^{-1}(V). \tag{1}$$

(a) Montrer que f est bijective.

(b) Déterminer les rotations de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété (1).

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

Question 3.

/5

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ une suite décroissante de nombres réels telle que $\forall\delta > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $|x_n| < \delta$. Montrez qu'alors $x_n \to 0$.

(b) Le résultat du point précédent est-il encore valable si y on remplace « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ » par « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ » ?

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 4. Pour $n \geqslant 2$ entier soit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{a \bmod n\mathbb{Z} \mid \mathrm{pgcd}(a,n) = 1\}$ le groupe multiplicatif de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer si le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique pour $n = 6, 7$ et 8. /4

Problèmes de Mathématique

Examen (17 janvier 2018)

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

/6

Question 5. Soit X un ensemble et $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ où $\mathscr{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X. Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing \subseteq \mathscr{A}$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing \in \mathscr{A}$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall a \in X,\ \forall A \in \mathscr{P}(X),\ (a \in A \text{ et } A \in \mathscr{A}) \Rightarrow \{a\} \in \mathscr{A}$

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall A \in \mathscr{A},\ \forall B \in \mathscr{B},\ A \cup B \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall A \in \mathscr{A},\ \forall B \in \mathscr{B},\ \forall a,\ \forall b,\ (a \in A \text{ et } b \in B) \Rightarrow \{a,b\} \subseteq A \cup B$

(f) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall A \in \mathscr{A},\ \forall B \in \mathscr{P}(X),\ B \notin \mathscr{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{A}$

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 6. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 2\}$. Montrer que parmi 5 points dans A, au moins deux points ont une distance d'au plus $\sqrt{2}$ entre eux. Le résultat reste-t-il vrai pour 4 points ? Donnez d'abord un argument basé sur l'intuition, puis donner un argument rigoureux.

/5

Problèmes de Mathématique

Examen (17 janvier 2018)

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

Question 7. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. /4

Justifiez les réponses de chacun des points auxquels vous répondez !

(a) L'application f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui, passez au (b) ; si non, vous avez terminé.

(b) Calculez la dérivée de f. La dérivée de f est-elle strictement positive sauf en un seul point de $\mathbb{R}$ où elle s'annule ? Si oui, passez au (c) ; si non, vous avez terminé.

(c) Pouvez-vous conclure des points précédents que f est croissante *sans* être strictement croissante sur $\mathbb{R}$? Si oui, passez au (d) ; si non passez au (e).

(d) Donnez (si possible) une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, croissante sans être strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et dont la dérivée ne s'annule jamais. Vous ne devez pas alors faire le point (e).

(e) Donnez (si possible) une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, non constante, croissante *sans* être strictement croissante sur $\mathbb{R}$.