Problèmes de Mathématique

Examen (27 août 2018)

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. On définit /6

$$A(v_1,v_2) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1,x_2,x_3) \text{ est orthogonal à } v_1 \text{ et } (x_1,x_2,x_3) \text{ est orthogonal à } v_2\},$$

où v_1 et v_2 sont deux vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^3$. On définit également $L_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotation d'angle θ autour de l'axe z dans le sens trigonométrique (lorsqu'on regarde cet angle dans le plan x-y), où $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soient v_1 et v_2, vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^3$, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$, $L_\theta(A(v_1,v_2))$ est une droite.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soient v_1 et v_2, vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^3$, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$, $L_\theta(A(v_1,v_2))$ est un plan.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe v_1 et v_2, vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^3$, et il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tels que $L_\theta(A(v_1,v_2))$ est un cercle de rayon 1.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe v_1 et v_2, vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^3$, et il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tels que $L_\theta(A(v_1,v_2))$ est un unique point.

Nom :	
Prénom :	
Section :	Bloc 2 math

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1-x^2)\sqrt{\ln(x)}$. /3

(a) La fonction f est-elle continue sur son domaine ? Dérivable ? De classe C^∞ ?

(b) Existe-t-il un point du domaine de f en lequel elle est continue ? Dérivable ? C^∞ ?

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 3. Prouvez que, pour tout $x \in [0,2]$, $\frac{1}{2}x \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. $/6$

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 4. Soient X, Y des ensembles et $f : X \to Y$ une application (donc $\mathrm{Dom}(f) = X$). $/4$

(a) Supposons que f soit injective. Montrer que pour tout ensemble $A \subseteq X$, $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

(b) Montrer que ce résultat ne reste pas vrai sans l'hypothèse d'injectivité de f.

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

Question 5. Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

/4

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit $p \in \mathbb{C}[x]$, si p est de degré trois, alors p possède trois racines complexes distinctes.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit $p \in \mathbb{R}[x]$, si p est de degré trois, alors p possède au moins une racine réelle.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit $p \in \mathbb{R}[x]$, si p est de degré deux, alors p possède au moins une racine réelle.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit $p \in \mathbb{Q}[x]$, si p est de degré un, alors p possède au moins une racine rationnelle.

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

/5

Question 6. Pour $n \geqslant 1$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer qu'il y a des réels a et b tels que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} H_k = a(n+1)H_n + bn,$$

et déterminer a et b. (*Indication* : intervertir les deux sommes.)

Problèmes de Mathématique

Examen (27 août 2018)

Nom :
Prénom :
Section : Bloc 2 math

Question 7. Soit $f, g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ deux applications continues telles que /7

(i) $f(0) = 0 = g(0)$;

(ii) g est strictement croissante ;

(iii) $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$;

(iv) $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \leqslant g(x)$.

(a) Montrez que, pour tout $c \in [0, +\infty[$, il existe un unique $a_c \in [0, +\infty[$ tel que $g(a_c) = c$.

(b) Montrez que, pour tout $c \in [0, +\infty[$, la quantité $b_c := \min\{x \in [0, +\infty[\mid f(x) = c\}$ existe.

(c) Prouvez que $\forall c \in [0, +\infty[,\ a_c \leqslant b_c$.

Veillez à la qualité de vos justifications.

Nom :	
Prénom :	
Section : Bloc 2 math	

/6

Question 8. Soit $\langle G, \cdot, 1 \rangle$ un groupe.

(a) Prouvez que tout sous-groupe d'indice 2 dans G est normal dans G.

(b) Prouvez que si g_1, g_2 et $g_1 g_2$ sont des éléments d'ordre 2 dans G, alors $[g_1, g_2] = 1$.

(c) Montrez que les hypothèses dans (b) sont nécessaires en donnant un contre-exemple dans le cas où $g_1^2 = 1$ et $g_2^2 = 1$.

(d) Montrez que si tous les éléments de $G \setminus \{1\}$ sont d'ordre 2 alors G est commutatif.