# Problèmes de Mathématique

## Examen

(16 janvier 2019)

| | |
|---|---|
| Nom : | |
| Prénom : | |
| Section : Bloc 2 math | |

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

---

Question 1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on définit $x \sim y$ si $x^2 - y^2 = 2x - 2y$. $/3$

(a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la classe d'équivalence de $x$. Combien y a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Nom : 

Prénom : 

Section : Bloc 2 math

**Question 2.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit l'application $f_* : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F)$ par

$$f_*(A) = f(A), \quad A \subseteq E.$$

/4

(a) Montrer que $f_*$ est injective si et seulement si $f$ est injective.

(b) Montrer que $f_*$ est surjective si et seulement si $f$ est surjective.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 3. Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

/5

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe $V_1$ et $V_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ tels que $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$ et une application linéaire $L : V_1 \to V_2$ qui soit injective sans être surjective.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe $V_1$ et $V_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ tels que $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$ et une application linéaire $L : V_1 \to V_2$ qui soit surjective sans être injective.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe $V_1$ et $V_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ tels que $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$ et une application linéaire $L : V_1 \to V_2$ qui soit bijective.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe $V_1$ et $V_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ tels que $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^5$ et une application linéaire $L : V_1 \to V_2$ qui soit bijective.

Nom : 

Prénom : 

Section : Bloc 2 math

Question 4. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels non-bornée supérieurement. Prouvez qu'il existe une sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x'_n \to +\infty$. /4

| | |
|---|---|
| Nom : | |
| Prénom : | |
| Section : Bloc 2 math | |

Question 5. Soit $(G, \cdot, 1)$, un groupe. Soit $H < G$. Pour $h \in H$, on considère l'application

/6

$$\lambda_h : G \to G : g \mapsto h \cdot g$$

On considère $\Lambda_H = \big(\{\lambda_h \mid h \in H\}, \circ, \lambda_1\big)$ où $\circ$ est la loi de composition de fonctions.

(a) Prouvez que, pour tout $h \in H$, $\lambda_h$ est une bijection.

(b) Donnez les $h \in H$ tels que $\lambda_h$ est un morphisme de groupe.

(c) Prouvez que $\Lambda_H$ est un groupe.

(d) Prouvez que $\sigma : H \to \Lambda_H : h \mapsto \lambda_h$ est un isomorphisme de groupe.

| | |
|---|---|
| Nom : | |
| Prénom : | |
| Section : | Bloc 2 math |

Question 6. Existe-t-il une application $\mathbb{R}$-linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que l'image par $f$ de tout plan est une droite ? $/5$

| | |
|---|---|
| Nom : | |
| Prénom : | |
| Section : Bloc 2 math | |

Question 7. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

/8

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(a) Montrez $\forall m, n \in \mathbb{N},\ m > n \Rightarrow |r_m - r_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\Bigl(1 + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\Bigr)$.

(b) Montrez $\forall m, n \in \mathbb{N},\ m > n \geqslant 1 \Rightarrow |r_m - r_n| \leqslant \frac{1}{n!\,n}$.
*Indication :* Utilisez la formule pour la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

(c) Déduisez en que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

La suite $(r_n)$ converge et sa limite est le nombre réel e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $p_n := n!(\mathrm{e} - r_n)$.

(d) Prouvez que, $\forall n \geqslant 2,\ p_n \in \,]0, 1[$ et que $p_n \to 0$.
*Indication :* Passez à la limite sur $m$ (en justifiant toutes les étapes) sur (b).

(e) Supposons que $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers strictement positifs $p$ et $q$ qui n'ont aucun diviseur commun tels que $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$. Montrez que pour tout $n \geqslant q$, $p_n \in \mathbb{N}$. Concluez que e est irrationnel.

Nom :

Prénom :

Section : Bloc 2 math

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

| |
|---|
| Nom : |
| Prénom : |
| Section : Bloc 2 math |

Question 8. Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses. /6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe $p \in \mathbb{Z}[X]$ de degré 2 tel que $p$ est à la fois irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe $p \in \mathbb{Z}[X]$ de degré 2 tel que $p$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et réductible dans $\mathbb{C}[X]$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe $p \in \mathbb{Z}[X]$ de degré 3 tel que $p$ est à la fois irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe $p \in \mathbb{Z}[X]$ de degré 3 tel que $p$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et réductible dans $\mathbb{R}[X]$.