Calculus I (partie B)

Examen (25 mai 2020)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 2 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Question 1. Calculez l'intégrale suivante en utilisant la méthode de votre choix. Veuillez détailler vos calculs et indiquer les méthodes que vous utilisez. $/7$

$$\int_1^{+\infty} \frac{4x^2+5x-1}{x^4+3x^3+3x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$$

Question 2. Calculez l'intégrale suivante en utilisant la méthode de votre choix. Veuillez détailler vos calculs et indiquer les méthodes que vous utilisez. $/4$

$$\int_0^{3\pi/4} \sin(2x)\sqrt{\sin(x)+1}\,\mathrm{d}x$$

Question 3. Déterminez la solution réelle $u : I \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ au problème de Cauchy $/4$

$$\partial_t u = u \ln|t|, \qquad u(t_0) = u_0,$$

où $t_0 \in \,]0,+\infty[$, $u_0 \in \,]0,+\infty[$ et I est aussi grand que possible. Détaillez et justifiez vos calculs.

Question 4. Déterminez l'ensemble $\mathscr{U}$ des solutions réelles $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ de l'EDO $/6$

$$\partial_t^2 u - \partial_t u - 2u = t^2 + \mathrm{e}^t\,.$$

Détaillez et justifiez vos calculs.

Question 5. On considère l'opérateur $D : \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{C}) : u \mapsto Du$ défini par $(Du)(t) := \partial_t^2 u(t) + u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Prouvez que $D(\Re\mathrm{e}(u)) = \Re\mathrm{e}\big(Du\big)$ quel que soit $u \in \mathscr{C}^2$. Pour rappel $\Re\mathrm{e}(u)$ est la fonction $t \mapsto \Re\mathrm{e}(u(t))$. $/3$