

# Calculus II

Examen (11 juin 2021)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

**Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.**

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 2 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Question 1. Calculez l'intégrale suivante :  $\int_0^{\pi/4} 2 \sin(2x) \cos(-4x) dx$ .

*Indication* : intégrez par parties.

/4

Question 2. Calculez l'intégrale impropre suivante (en utilisant la définition de limite au sens strict) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{-x^2 + 5x + 4}{2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx.$$

*Indication* : le dénominateur s'annule en  $x = -1/2$ .

/6

# Calculus II

Examen (11 juin 2021)

---

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 3. Le but de cette question est de calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4\sqrt{e^{\sin(x)}}}{\sqrt{e^{\sin(x)}} + \sqrt{e^{\cos(x)}}} dx.$$

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  une fonction continue. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Posons

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x) + f(x)} dx.$$

(a) Prouvez que

$$I = \int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(a+b-x) + f(x)} dx.$$

- (b) À partir du point (a), exprimez  $2I$  en fonction de  $a$  et  $b$  (indépendamment de  $f$ ). Déduisez-en la valeur de  $I$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
- (c) Répondez à la question initiale.

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Déterminez la solution réelle  $u : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$  du problème de Cauchy

/4

$$\partial_t u(t) = (tu(t))^3 \quad u(0) = u_0,$$

où  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $I$  est aussi grand que possible. Donnez  $u$  sous la forme d'une seule formule (qui peut dépendre de  $u_0$ ) :

$u(t) =$

$I =$

Ci-dessous, détaillez et justifiez les calculs qui donnent lieu à cette solution.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'EDO suivante :

$$\partial_t^2 u(t) + 4u(t) = t^2 + t + \sin(2t).$$

/6

# Calculus II

Examen (11 juin 2021)

---

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.