Calculus II

Examen (1er septembre 2021)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres MAJUSCULES votre *nom*, *prénom* et *section* (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos calculs et vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1. Calculez l'intégrale $\int_0^1 \sinh(2x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$ où, pour rappel, $\sinh(x) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$ désigne le sinus hyperbolique. *Indication :* intégrez par parties. $/4$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez l'intégrale impropre suivante (en utilisant la définition de limite au sens strict) : /6

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^2 - 10x - 2}{x^4 + x^2 - 6}\,\mathrm{d}x.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Calculus II

Examen (1er septembre 2021)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Déterminez la solution réelle $u : I \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ du problème de Cauchy

/4

$$\partial_t u(t) = \frac{1}{u(t)} + u(t), \qquad u(0) = u_0,$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$ et I est aussi grand que possible. Donnez u sous la forme d'une seule formule (qui peut dépendre de u_0) :

$u(t) =$

$I =$

Ci-dessous, détaillez et justifiez les calculs qui donnent lieu à cette solution.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'EDO suivante :

/6

$$\partial_t^2 u(t) + 4\partial_t u(t) = 1 + t + t^2 + \cos(2t).$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Calculus II

Examen (1er septembre 2021)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit a un nombre réel. Nous savons que le problème de Cauchy

/3

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_t u + u = 0, \\ u(0) = 0,\ \partial_t u(0) = a \end{cases} \tag{1}$$

possède une unique solution. Nous noterons celle-ci $u(\,\cdot\,;a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t;a)$ pour insister sur sa dépendance vis à vis du paramètre a. Montrez que l'application

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : a \mapsto u(1;a)$$

est linéaire.