

Calculus II

Examen (juin 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres MAJUSCULES votre *nom*, *prénom* et *section* (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- L'examen dure 3 heures.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos calculs et vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1. Un étudiant vous demande de l'aide. Il a fait le calcul suivant :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} = -2.$$

où la première égalité résulte du théorème fondamental de l'analyse. Cependant, dit-il, comme la fonction $1/x^2$ est positive, la réponse devrait être l'aire en dessous de la courbe, donc positive. Quelle explication lui donnez-vous ? Justifiez cette explication grâce aux résultats vus au cours. La qualité de votre rédaction est importante.

/3

Calculus II

Examen (juin 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Calculez l'intégrale $\int_0^1 e^{\arcsin x} dx$ en détaillant justifiant les différentes étapes qui mènent à votre réponse.

Indication : intégrez deux fois par parties.

/4

Calculus II

Examen (juin 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Calculez l'intégrale $\int_2^3 \frac{7x^2 - 10x + 4}{x^3 - 2x^2 + x} dx$ en détaillant et justifiant les différentes étapes de vos calculs.

/ 4

Calculus II

Examen (juin 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4.

/6

(a) Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'EDO suivante :

$$\partial_t^2 u(t) - 4\partial_t u(t) = e^t + \sin(t). \tag{1}$$

(b) Existe-t-il une solution de l'équation (1) vérifiant $u(0) = 1$ et $\partial_t u(0) = 0$? Justifiez.

Calculus II

Examen (juin 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Déterminez la solution réelle $u : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ du problème de Cauchy

/4

$$\partial_t u(t) = u(t)t^{1/2} \quad u(0) = u_0,$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$ et I est aussi grand que possible. Donnez u sous la forme d'une seule formule (qui peut dépendre de u_0) :

$u(t) =$

$I =$

Ci-dessous, détaillez et justifiez rigoureusement les calculs qui donnent lieu à cette solution.

Calculus II

Examen (juin 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Soit P un polynôme à coefficients réels, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto u(t)$ une solution complexe de $P(\partial_t)u = f$. Montrez que la fonction $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \Im(u(t))$ est solution de l'EDO $P(\partial_t)v = \Im(f)$ où, pour rappel, $\Im(f)$ désigne la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \Im(f(t))$. Veillez à la qualité de vos justifications.

/3