UMONS

Problèmes de Mathématique

Définition de la matière et exemples de questions

https://math.umons.ac.be/anum/fr/enseignement/pbmmath/

1 Définition de la matière

En sus de l'ensemble de la matière du cours de Mathématiques Élémentaires de BAC 1, les points suivants doivent être maîtrisés. [1]

(a) Opérations avec des ensembles (unions/intersections de familles, passage au complémentaire,..., distinction entre appartenance et inclusion,...).

(b) Image d'un ensemble par une fonction, préimages (image réciproque), applications injectives, surjectives, bijectives.

(c) Relations d'équivalence : Quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence.

(d) Preuves par récurrence.

(e) Manipulation des quantificateurs universel ($\forall$) et existentiel ($\exists$).

(f) Équations (cartésiennes et paramétriques) de droites (dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$) et de plans (dans $\mathbb{R}^3$).

(g) Notion d'espace vectoriel et de base (d'un espace vectoriel).

(h) Algèbre linéaire élémentaire.
- Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels ; sommes, sommes directes ; suites libres, suites génératrices, bases ; dimension.
- Applications linéaires ; images, noyaux ; théorème du rang ; représentations matricielles, changements de base.

(i) Fonctions réelles élémentaires (polynômes, quotient de polynômes, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\ln(x)$,...) ; i.e., connaissance de leur graphe, caclul de leur dérivée, développement de Taylor,...

(j) Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: calcul de limites en un point (par règles de calcul et argument ε-δ), calcul de dérivées en un point.

(k) Utilisation des théorèmes des valeurs intermédiaires et de la moyenne.

(l) Séries numériques : séries numériques simples (géométrique, exponentielle,...), utilisation des critères de convergence, calcul des limites dans des cas simples.

(m) Intégrales de base (niveau secondaire).

(n) Résolution d'équations complexes (niveau mathématiques élémentaires).

(o) Arithmétique élémentaire dans $\mathbb{Z}$.
- Division euclidienne ; nombres premiers, factorisation ; ppcm, pgcd.
- Arithmétique modulaire (calculs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) ; utilisation des règles modulo p.

1. Certains points de Mathématiques Élémentaires y figurent. Considérez que celà signifie qu'ils sont particulièrement importants pour les cours de BAC 2.

(p) Structures algébriques élémentaires :
- Groupes (en particulier S_n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), sous-groupes, sous-groupes normaux, théorème de Lagrange, ordre d'un élément; anneaux : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ at anneaux de polynômes; corps (en part. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), sous-corps.
- Morphismes; images, noyaux.

2 Exemples de questions

Question 1. Soit Ω un ensemble, $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω, A_1, A_2, $A_3 \subseteq \Omega$ et $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. Déterminer pour chaque assertion si elle est vraie ou fausse. Cocher la case qui convient.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\{A_1 \cap A_2, A_1 \cap A_3, A_2 \cap A_3\} \subseteq \{A_1, A_2, A_3\}$,

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\{A_1, A_2\} \subseteq \{A_1, A_2, A_3\}$,

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathscr{A} \text{ ou } A \in \mathscr{B}\}$,

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \{A \cup B : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$,

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing = \{\varnothing\}$,

(f) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing \in \{\varnothing\}$,

(g) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

Question 2. Pour deux sous-ensembles A et B d'un ensemble Ω, la différence symétrique $A \,\Delta\, B$ est définie par

$$A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Déterminer pour chaque assertion si elle est vrai ou fausse pour tout $A, B, C \subseteq \Omega$:

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\complement(A \,\Delta\, B) = A \cap B$;

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $A \,\Delta\, \Omega = \complement A$;

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$;

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, A = B$;

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ pour tout $A \subseteq \Omega$ il existe $B \subseteq \Omega$ tel que $A \,\Delta\, B = \varnothing$;

(f) Vrai : ☐ Faux : ☐ $A \cap B \cap C \subseteq A \,\Delta\, B \,\Delta\, C$.

Question 3. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $\mathscr{P}(E), \mathscr{P}(F)$ l'ensemble des sous-ensembles de E, F respectivement. Soient les applications

$$\begin{aligned} \alpha : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \mathscr{P}(F) \\ A &\longmapsto f(A) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \beta : \mathscr{P}(F) &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ B &\longmapsto f^{-1}(B)\,. \end{aligned}$$

- Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $A \subseteq (\beta \circ \alpha)(A)$.
- Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Montrer que $(\alpha \circ \beta)(B) \subseteq B$.

- Montrer que $\beta \circ \alpha = \mathbb{1}_{\mathscr{P}(E)}$ si et seulement si f est injective.
- Montrer que $\alpha \circ \beta = \mathbb{1}_{\mathscr{P}(F)}$ si et seulement si f est surjective.

Question 4. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $\mathscr{R}$ la relation sur E définie par $x\mathscr{R}y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$.

- Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
- Soit $\pi : E \to E/\mathscr{R}$, $x \mapsto [x]$, où $[x]$ est la classe de x selon $\mathscr{R}$. Montrer qu'il existe une unique application $\varphi : E/\mathscr{R} \to F$ telle que $f = \varphi \circ \pi$.
- Montrer que φ est injective.

Question 5. Dans chacun des cas suivants, donnez (si possible) une équation paramétrique de droite satisfaisant les contraintes données.

(a) Une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(1,2)$ et $(1,3)$.

(b) Une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(1,0)$ et $(0,1)$.

(c) Une droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

Question 6. On définit $E_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3 = 0\}$, $E_2 = \{(\lambda_2, \lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1) \in \mathbb{R}^3 \mid (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$ et $E_3 = \langle (1,1,-2),(5,-4,-1) \rangle$ trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(a) Trouvez une base de E_i (pour $i = 1,2,3$).

(b) Comparez les trois sous-espaces vectoriels E_1, E_2 et E_3.

Question 7. Soit $B = (e_1,e_2,e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (-x-3y-2z,\, x+y+z,\, y+z). \end{aligned}$$

- Déterminer la matrice de f dans la base B.
- Soit $C = (v_1,v_2,v_3)$ avec $v_1 = (-2,1,0)$, $v_2 = (-1,-1,1)$ et $v_3 = (1,0,-1)$. Montrer que C est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer la matrice de f dans la base C.
- Soit $V = \langle v_1,v_2 \rangle$. Montrer que $f(V) \subseteq V$ et déterminer la matrice de la restriction $f_{|V} : V \to V$ dans la base $D = (v_1,v_2)$.

Question 8. Soit E un K-espace vectoriel, où K est un corps de caractéristique différente de 2, et $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f \circ f = \mathbb{1}_E$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(f+\mathbb{1}_E) \subseteq \mathrm{Ker}(f-\mathbb{1}_E)$ et $\mathrm{Im}(f-\mathbb{1}_E) \subseteq \mathrm{Ker}(f+\mathbb{1}_E)$.
- Montrer que $\mathrm{Im}(f+\mathbb{1}_E)+\mathrm{Im}(f-\mathbb{1}_E) = E$.
- Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f-\mathbb{1}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f+\mathbb{1}_E)$.

Question 9. Sur un même dessin, esquissez le graphe des fonctions suivantes : e^x, $\ln(x)$, e^{-x} et e^{-x^2}.

Question 10. Soient a,b,c,d des réels. Étudier l'égalité suivante :

$$\max(a,b) - \max(c,d) = \max(a-c, b-d).$$

Question 11. Soient a et b des nombres réels ou complexes. Démontrer les inégalités suivantes :
- $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$,
- $\big|(1+a)(1+b)-1\big| \leqslant (1+|a|)(1+|b|)-1$.

Question 12. Soient a et b des nombres réels positifs. Démontrer les inégalités :
- $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$,
- $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$,
- $(a+b)^3 \leqslant 4(a^3+b^3)$,
- $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Question 13. Étudier la continuité de la fonction f définie sur l'ensemble des réels non nuls x par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Question 14. Comparer

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{n}{n+m} \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+m}.$$

Question 15. Calculer les bornes inférieures et supérieures des ensembles :

$$\left\{\frac{(-1)^n}{n+1} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}, \qquad \left\{(-1)^n n \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}, \qquad \left\{2-\frac{n-1}{10} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}, \qquad \left\{(-1)^n \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Question 16. Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle. Étudier l'égalité suivante :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(f(x)+g(x)) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) + \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x).$$

Question 17. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-1,1]$ et à valeurs réelles. Calculer $\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)|$ pour :
- $f(x)=x^n$,
- $f(x)=\sin(nx)$,

où n est un entier naturel.

Question 18. Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle. Étudier l'égalité suivante :

$$\left|\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) - \inf_{x\in\mathbb{R}} g(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|.$$

Question 19. Donnez le développement de Taylor en 1 de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.

Question 20. On considère la suite de fonctions $f_n : x\mapsto x^n$ définies sur l'intervalle $[0,1]$. Calculer :
- $\lim_{x\to 1,\ x<1}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
- $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1,\ x<1} f_n(x)$.

Question 21. Donnez (si possible) un exemple de fonction discontinue au point 2. Justifiez votre réponse.

Question 22. Donnez (si possible) un exemple de fonction continue mais non dérivable au point 3.

Question 23. Donnez (si possible) un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ mais continue en aucun point de $\mathbb{R}$. Prouvez cette discontinuité.

Question 24. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie ci-dessous :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Prouver que cette fonction est dérivable une fois mais que sa dérivée n'est pas continue.

Question 25. Vrai ou Faux (Justifiez votre réponse).

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le quotient de fonctions dérivables est dérivable.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f(x) = 2x + 1$ est dérivable au point 1.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ L'ensemble $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon$ diverge quel que soit $\varepsilon > 0$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction sinus est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 26. Calculez (si elle existe) la limite des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \pi^{-n}, \qquad \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{7^n}.$$

Question 27.

(a) Évaluer la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!}$.

(b) Pour chaque série, déterminer si elle est convergente ou divergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{37}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^2}$$

Question 28. Évaluer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k-1).$$

Question 29. Évaluer les intégrales suivantes (quelques soient les bornes) :

$$\int x^a \,\mathrm{d}x, \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}; \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Question 30. Soient n un entier naturel non nul et x un nombre réel. On pose $f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - x^2}$ si $|x| < n$ et 0 sinon. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Question 31. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue un nombre réel x :

- $3x = 2 + \sqrt{x^2 - 12x + 12}$,
- $\sqrt{3x+4} + 3 = \sqrt{5x+1}$.

Question 32. Donnez toutes les solutions complexes de l'équation $x^4 + 1 = 0$.

Question 33. Soient $n, m, k \in \mathbb{N}$ non nuls.

- Montrer que $\mathrm{pgcd}(kn, km) = k \cdot \mathrm{pgcd}(n, m)$.
- Montrer que $\mathrm{ppcm}(kn, km) = k \cdot \mathrm{ppcm}(n, m)$.

Question 34.

- Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tels que $x^2 - x = 0$.
- Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tels que $x^2 - 2x = 0$.

Question 35. Soit $\mathbb{Q}(\boldsymbol{i}) := \{a + \boldsymbol{i}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$.

- Montrer que $\mathbb{Q}(\boldsymbol{i})$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
- Déterminer les sous-corps K de $\mathbb{C}$ tels que $K \subseteq \mathbb{Q}(\boldsymbol{i})$.

Question 36.

- Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ tels que $x^{25} = x$.
- Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ tels que $x^8 = x$.