

# Analyse mathématique I

Coté

(26 mars 2001)

Nom :

Prénom :

Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications* sont aussi (voire plus) *importantes* que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Allez droit au but !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille de la *question précédente* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y - 4$ . Pour  $\lambda \geq 0$ , posons

$$F_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leq \lambda\}.$$

Montrez que  $F_\lambda$  est fermé.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit la fonction  $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- Étudiez les points critiques de  $f$  en fonction de  $a$  et  $b$ . Quels sont-ils ? Sont-ils des maximums locaux, des minimums locaux, ni l'un ni l'autre ?
- Auriez-vous pu prévoir les résultats du point précédent sans calculs ? Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Quel est le développement taylorien d'ordre 3 en 0, avec un reste exprimé en terme de « petit o » de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2x}.$$

Déduisez en la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{2\sqrt{1+x} - (x+2)}$$

# Analyse mathématique I

Coté

(26 mars 2001)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Supposons que  $f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pi$ .  
Montrez qu'il existe  $x^* \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x^*)$ .