Analyse mathématique I

Coté (18 mars 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi (voire plus) *importantes* que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Allez droit au but !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille de la *question précédente* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez un exemple

(a) de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f ne soit pas dérivable en 1 et en -1,

(b) de suite bornée qui ne converge pas,

(c) de fonction qui est un « petit o » de x^{2002} quand x tend vers 0,

(d) d'ensemble dont la borne inférieure est π,

(e) de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$ mais $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(1) = 0$ et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -2$. Montrez qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(\alpha) \geqslant f(x)$.

Analyse mathématique I

Coté (18 mars 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int}\operatorname{Dom} f$.

(a) Définissez la dérivée de f en a en explicitant la limite en termes de ε, δ.

(b) Utilisez cette définition pour montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + x$$

est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et que $\partial f(a) = 2a + 1$.

Analyse mathématique I

Coté (18 mars 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4.

(a) Soit $f \in C^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On sait qu'on peut écrire

$$f(x) = p(x) + r(x)$$

où p est un polynôme de degré inférieur ou égal à k et $r(x) = \mathrm{o}(|x-a|^k)$.

Donnez des formules explicites pour p et r.

(b) Appliquez les formules ci-dessus à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $a = 0$ à l'ordre 4. Détaillez vos calculs.

Analyse mathématique I

Coté (18 mars 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$. La proposition

$$\text{« } A \subseteq B \text{ si et seulement si } A \cap B = A \text{ »}$$

est-elle vraie ou fausse ? Si elle est vraie, donnez-en une preuve. Dans le cas contraire, donnez-en un contre-exemple.