Analyse mathématique I

Coté

(24 mars 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi (voire plus) *importantes* que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Allez droit au but !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille de la *question précédente* pour finir votre réponse !

Question 1. Énoncez le théorème de la moyenne. Représentez graphiquement ce qu'il signifie et commentez ce graphique par une phrase en français.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Définissez

- l'adhérence d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ en terme de suites ;

- $C \subset \mathbb{R}^N$ est compact ;

- $a \in \mathbb{R}$ est l'infimum de $A \subset \mathbb{R}$;

- $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble fini.

Question 3. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a ».

Montrez, à partir de cette définition que

- la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ est continue en -2.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Montrez, à partir de la définition ci-dessus que

- la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \big(|x| + |y|\big)\sin(xy)$ est continue en $(0,0)$.

Analyse mathématique I

Coté (24 mars 2003)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Soit $a \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$, $r' > 0$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Complétez les égalités et équivalences suivantes afin qu'elles soient vraies.

$$B_{\|\cdot\|}(a,r) = \{x \qquad : \qquad\qquad \}$$

$$B_{\|\cdot\|}[a,r'] = \{x \qquad : \qquad\qquad \}$$

$$x \in B_{\|\cdot\|}(a,r) \Leftrightarrow$$

$$x \in B_{\|\cdot\|}[a,r'] \Leftrightarrow$$

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. Considérons les deux propriétés suivantes :

(a) $\exists r > 0,\ B_{\|\cdot\|}(0,r) \subset A$

(b) $\exists r' > 0,\ B_{\|\cdot\|}[0,r'] \subset A$

Montrez, en détaillant votre raisonnement, que (a) $\Leftrightarrow$ (b).

Analyse mathématique I

Coté (24 mars 2003)

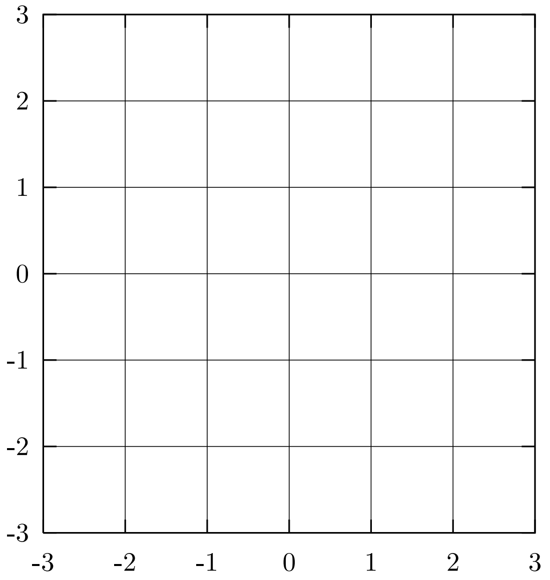
Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant y\}$.

- Représentez graphiquement E sur la figure ci-dessous.



- E est-il fermé ? Justifiez.

- E est-il ouvert ? Justifiez.

Analyse mathématique I

Coté (24 mars 2003)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple. *Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.*

Vrai : ☐ Faux : ☐ $]-1,3]$ est ouvert.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing$ est un compact de $\mathbb{R}^7$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $\operatorname{adh}]0,1[\supset [0,1]$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite est croissante, alors elle converge au sens large.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite bornée est convergente.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6 (suite).

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute intersection d'ouverts est ouverte.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Une équation de la tangente au graphe d'une fonction f au point $\big(x_0, f(x_0)\big)$ est $f(x) = f(x_0) + \partial f(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f(x) := \sin x^2 \cdot \mathrm{e}^x \cdot x^3$ est un petit o de x^2 quand $x \to 0$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute fonction continue est dérivable.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 \cos(x)$. Il existe un $x_0 \in [0,1]$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x_0) \geqslant f(x)$.