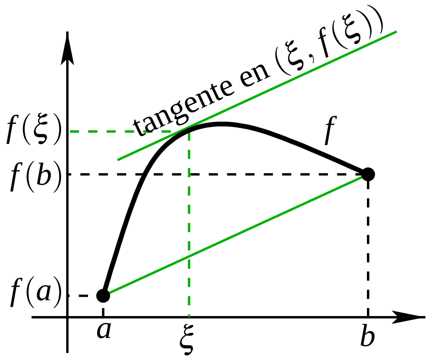
Analyse mathématique I

Coté (24 mars 2003) **Correction**

Question 1. *Énoncez le théorème de la moyenne. Représentez graphiquement ce qu'il signifie et commentez ce graphique par une phrase en français.*



Soit f une fonction continue de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ qui est dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe un $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \partial f(\xi)(b-a).$$

Ce théorème exprime le fait qu'il existe un point ξ de $]a,b[$ en lequel la pente de la tangente, à savoir $\partial f(\xi)$, vaut exactement le pente de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ c'est-à-dire $\big(f(b) - f(a)\big)/(b-a)$. Ces deux droites sont donc parallèles.

Question 2. *Définissez*

- *l'adhérence d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ en terme de suites ;*

$$\operatorname{adh} A = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subset A,\ x_n \to x\right\}$$

- *$C \subset \mathbb{R}^N$ est compact ;*

  C est compact si, de tout recouvrement de C par une famille d'ouverts $(O_\alpha)_{\alpha\in A}$, on peut extraire un sous recouvrement fini $\{O_{\alpha_1}, \dots, O_{\alpha_n}\} : C \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$

- *$a \in \mathbb{R}$ est l'infimum de $A \subset \mathbb{R}$;*

  a est l'infimum de A s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

  - a minore A : $\forall x \in A,\ a \leqslant x$;
  - a est le plus grand des minorants : $\forall a' \in \mathbb{R},\ (\forall x \in A,\ a' \leqslant x) \Rightarrow a' \leqslant a$.

- *$A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble fini.*

  A est un ensemble fini s'il contient un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire s'il existe $a_1, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, tels que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Question 3. *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a ».*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f,\ \|x-a\|_{\mathbb{R}^N} \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^M} \leqslant \varepsilon$$

Question 3 (suite). *Montrez, à partir de la définition ci-dessus que*

- *la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ *est continue en* -2.

  Montrons que
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x+2| \leqslant \delta \Rightarrow \big||x| - 2\big| \leqslant \varepsilon$$
  Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x+2| \leqslant \delta$. Vu que $\forall x \in \mathbb{R},\ \big||x| - |-2|\big| \leqslant |x+2|$, nous déduisons
  $$\big||x| - 2\big| \leqslant |x+2| \leqslant \delta = \varepsilon.$$

- *la fonction* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \big(|x| + |y|\big)\sin(xy)$ *est continue en* $(0,0)$.

  Montrons que
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y) - (0,0)\|_{\mathbb{R}^2} \leqslant \delta \Rightarrow \big|(|x| + |y|)\sin(xy) - g(0,0)\big| \leqslant \varepsilon$$
  Remarquons que
  - nous pouvons choisir la norme sur $\mathbb{R}^2$. Vu la forme de la fonction g, nous allons prendre la norme 1 : $|(x,y)|_1 = |x| + |y|$;
  - $g(0,0) = 0$.

  Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x+2|_1 \leqslant \delta$. Vu que le sinus est compris entre -1 et 1, nous avons que
  $$\big|(|x| + |y|)\sin(xy) - g(0,0)\big| \leqslant |x| + |y| = |(x,y)|_1 \leqslant \delta = \varepsilon.$$

Question 4. *Soit* $a \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$, $r' > 0$ *et* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^N$. *Complétez les égalités et équivalences suivantes afin qu'elles soient vraies.*

$$\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - a\| < r\}$$
$$\mathrm{B}_{\|\cdot\|}[a,r'] = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - a\| \leqslant r'\}$$
$$x \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(a,r) \Leftrightarrow \|x - a\| < r$$
$$x \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[a,r'] \Leftrightarrow \|x - a\| \leqslant r'$$

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. *Considérons les deux propriétés suivantes :*

(a) $\exists r > 0,\ \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,r) \subset A$

(b) $\exists r' > 0,\ \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r'] \subset A$

Montrez, en détaillant votre raisonnement, que (a) $\Leftrightarrow$ *(b).*

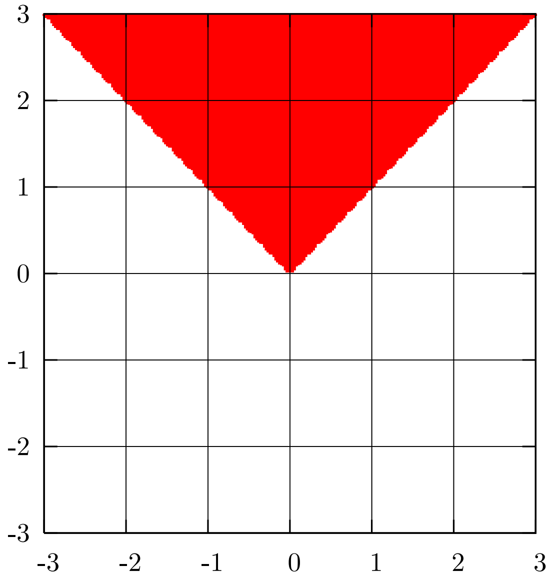
(a) $\Rightarrow$ (b) Nous supposons que (a) est vérifié, c'est-à-dire qu'il existe un $r > 0$ tel que $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,r) \subset A$. Nous devons trouver un $r' > 0$ tel que $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r'] \subset A$. Posons $r' = r/2$. Comme $r > 0$, nous savons que $r' > 0$. De plus, si $x \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r']$, alors x vérifie la relation $\|x - a\| \leqslant r/2$ et donc, en particulier, la relation $\|x - a\| < r$. Ceci montre que $x \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,r)$. Comme $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,r) \subset A$, on a $x \in A$. Étant donné que ce raisonnement est valable quel que soit le x pris dans $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r']$, on vient d'établir que $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r'] \subset A$ comme voulu.

(b) $\Rightarrow$ (a) Nous supposons que (b) est vérifié, c'est-à-dire qu'il existe un $r' > 0$ tel que $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r'] \subset A$. Nous devons trouver un $r > 0$ tel que $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,r) \subset A$. Posons $r = r'$. Comme $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,r) \subset \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r'] \subset A$, nous obtenons

$$\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,r) \subset A.$$

Question 5. *Soit* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant y\}$.

- *Représentez graphiquement E sur la figure ci-dessous.*



- *E est-il fermé ? Justifiez.*

  Oui. En effet, si $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E qui converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nous allons montrer que $(x,y) \in E$. L'appartenance de la suite $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ à E signifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leqslant y_n.$$

  En passant à la limite $n \to \infty$ et en utilisant la conservation des inégalités larges et la continuité de la fonction $x \mapsto |x|$, on obtient $|x| \leqslant y$, c'est-à-dire $(x,y) \in E$.

- *E est-il ouvert ? Justifiez.*

  E n'est pas ouvert. En effet, si on prend par exemple le point $(0,0) \in E$, aucune boule centrée en ce point ne sera totalement incluse à E. Plus précisément, la boule $\mathrm{B}_{|\cdot|_2}\big((0,0),r\big)$ pour $r > 0$ arbitraire, contient le point $(0,-r/2)$ qui n'est pas dans E — vu qu'il ne vérifie pas $|0| \leqslant -r/2$.

  REMARQUE : On pouvait répondre très rapidement : E ne peut être ouvert car $E \neq \varnothing$ est fermé et les seuls ensembles simultanément ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^2$ sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$.

Question 6. *Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple.* Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.

Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $]-1,3]$ *est ouvert.*

En effet, la suite (x_n) définie par $x_n = 3 + 1/n$ converge vers $3 \in]-1,3]$ sans jamais entrer dans $]-1,3]$.

Vrai : ☑ Faux : ☐ $\varnothing$ *est un compact de* $\mathbb{R}^7$.

Si $(O_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un recouvrement ouvert de $\varnothing$, il suffit de prendre le sous recouvrement qui ne contient aucun ouvert ! C'est en effet bien un recouvrement de $\varnothing$ car $\bigcup_{\alpha\in\varnothing} O_\alpha = \varnothing$.

Vrai : ☑ Faux : ☐ $\operatorname{adh}]0,1[\supset [0,1]$.

Tout d'abord, nous savons que $\operatorname{adh}]0,1[\supset]0,1[$ (propriété vue au cours). Il reste donc a établir que 1 et 0 sont dans l'adhérence de $]0,1[$. Pour cela, il suffit de trouver deux suites dans $]0,1[$ qui convergent respectivement vers 1 et 0. On peut par exemple prendre :

- $(1-1/n)_{n\geqslant 2}$ qui converge vers 1 ;
- $(1/n)_{n\geqslant 2}$ qui converge vers 0.

Vrai : ☑ Faux : ☐ *Si une suite est croissante, alors elle converge au sens large.*

En effet, de deux choses l'une :

- si elle est majorée, alors elle converge vers un réel (théorème vu au cours) ;
- si elle est non majorée elle converge vers $+\infty$ (théorème vu au cours).

Comme « converger au sens large » veut dire « converger vers un réel ou converger vers $\pm\infty$ », on a bien établi la propriété.

Vrai : ☐ Faux : ☑ *Toute suite bornée est convergente.*

Voici un contre-exemple : la suite (x_n) définie par $x_n = (-1)^n$ est bornée par 1 mais n'est pas convergente (vu au cours).

Vrai : ☐ Faux : ☑ *Toute intersection d'ouverts est ouverte.*

Considérons la suite d'ouverts $(O_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$O_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

Il est clair que $0 \in \bigcap_{n\geqslant 1} O_n$ vu que $0 \in O_n$ pour tout n. Par ailleurs, si $x \in \bigcap_{n\geqslant 1} O_n$, alors $|x| \leqslant 1/n$ pour tout n et en passant à la limite $n \to \infty$, on a $|x| = 0$. Autrement dit

$$\bigcap_{n\geqslant 1} O_n = \{0\}.$$

L'ensemble $\{0\}$ n'est pas un ouvert.

REMARQUE : Si l'intersection est finie, c'est vrai.

Vrai : ☐ Faux : ☑ *Une équation de la tangente au graphe d'une fonction f au point $(x_0, f(x_0))$ est $f(x) = f(x_0) + \partial f(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$.*

Ce n'est même pas une équation que devraient satisfaire les points (x, y).

Vrai : ☑ Faux : ☐ *La fonction $f(x) := \sin x^2 \cdot e^x \cdot x^3$ est un petit o de x^2 quand $x \to 0$.*

En effet

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} (\sin x^2 \cdot e^x \cdot x) = \sin 0^2 \cdot e^0 \cdot 0 = 0$$

Vrai : ☐ Faux : ☑ *Toute fonction continue est dérivable.*

Voici un contre exemple : la fonction $f(x) = |x|$ est continue, pourtant elle n'est pas dérivable en 0.

Vrai : ☑ Faux : ☐ *Soit la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 \cos(x)$. Il existe un $x_0 \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in [0, 1],\ f(x_0) \geqslant f(x)$.*

Cette fonction est continue sur $[0, 1]$ qui est compact. Elle atteint donc ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe deux points $x_{\min}$ et $x_{\max}$ dans $[0, 1]$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_{\min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{\max}).$$

Il suffit de prendre $x_0 := x_{\max}$