Analyse mathématique I

Coté (22 mars 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer le coté.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Définissez

- A est fermé en termes de boules.
- A est borné.
- A est compact en termes de recouvrement.
- $f : A \to \mathbb{R}$ atteint son minimum.
- A est fini.

Analyse mathématique I

Coté (22 mars 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \dfrac{3n+4}{2n+3}$. Cette suite est-elle croissante, décroissante, majorée, minorée, bornée, convergente ? Calculez $\max\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\min\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\lim_{n\to\infty} x_n$ s'ils existent. Justifiez toutes vos réponses.

Analyse mathématique I

Coté (22 mars 2004)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple. *Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.*

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite croissante majorée par 3 converge vers 3.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ possède une sous-suite convergente.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant 1/2$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, alors f est continue en a.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $\inf A \in \mathbb{R}$, alors $\inf A \in \operatorname{adh} A$.

Analyse mathématique I

Coté (22 mars 2004)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est-elle continue (sur son domaine de définition) ? Justifiez.

Question 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \dfrac{xy+y}{x}$. Que vaut $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Soit $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille finie d'ensembles fermés. Démontrez que $\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$ est encore fermée. Montrez, par un exemple dans $\mathbb{R}$ et un autre dans $\mathbb{R}^2$, que la propriété précédente est fausse si A est un ensemble infini. *Veillez à la qualité de la rédaction.*

Analyse mathématique I

Coté (22 mars 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Considérons l'ensemble

$$E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2 \text{ et } x + y \leqslant 0\right\}.$$

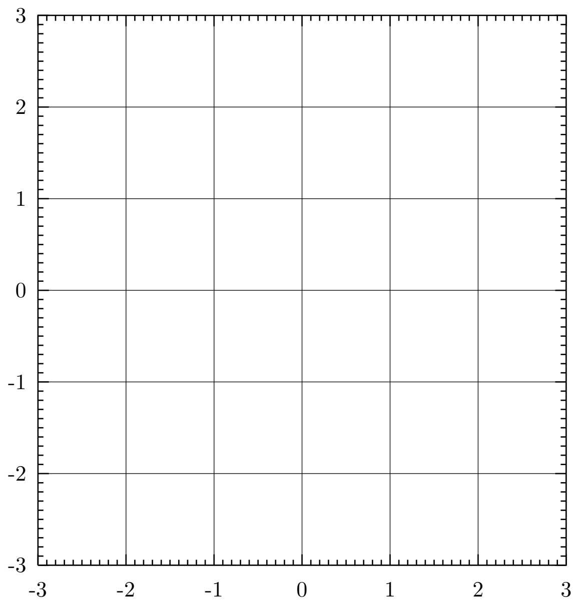
(a) Représentez E sur le graphique ci-dessous.

(b) L'ensemble E est-il ouvert ? Fermé ?

(c) Posons $F = \left\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$. L'ensemble F est-il ouvert ? Fermé ?

(d) L'ensemble $E \cup F$ est-il fermé ?

Justifiez en détail en indiquant clairement quelle(s) définition(s) et quel(s) résultat(s) vous utilisez.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.