Analyse mathématique I

Coté

(19 mars 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Lisez ces quelques consignes avant de commencer ce coté.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées. Les feuilles où la section n'est pas mentionnée seront pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. $/5$

- Définissez « f est continue en a » en termes de suites.

- Posons $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M : x \mapsto f(x+a)$. Prouvez que f est continue en a *si et seulement si* g est continue en 0.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Calculez les limites suivantes si elles existent. Justifiez toutes les étapes de vos calculs. /6

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^7y^5}{x^4+y^4}$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{xy}$

Analyse mathématique I

Coté (19 mars 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Pour chaque question ci-dessous, énoncez clairement les définitions et les résultats utilisés. /8

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$. Montrez que, quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a[1] $f\big([a,b]\big) \supseteq \big[f(a), f(b)\big]$.

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que si A n'est pas borné inférieurement, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ telle que $x_n \to -\infty$.

- Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$. Prouvez que la fonction $f + g$ est continue en a.

- Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ deux ensembles bornés. Montrez que $A \cup B$ est aussi borné.

[1] Rappelons que les intervalles sont définis par $[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$ si $\alpha \leqslant \beta$ et $[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \geqslant x \geqslant \beta\}$ si $\alpha \geqslant \beta$.

Analyse mathématique I

Coté (19 mars 2007)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x + \ln x$.

/6

- Esquissez le graphe de f en expliquant les différentes étapes qui mènent à votre graphique.
- Montrez que f possède une et une seule racine.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /7

$$f(x) = \begin{cases} 1+3x & \text{si } x < 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \\ (1+x)^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la valeur de λ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. *Il ne suffit donc pas de donner la valeur de λ, il faut également justifier explicitement que cette valeur répond à la contrainte de continuité. Il est bien entendu nécessaire de justifier toutes vos affirmations.*

(b) Pour la valeur de λ trouvée au point précédent, calculez, si elle existe, $\partial_x f(0)$. Détaillez vos calculs en énonçant les définitions et résultats que vous utilisez.

Analyse mathématique I

Coté (19 mars 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple.

/8

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite de nombres réels négatifs et strictement croissante converge vers 0.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite strictement croissante de nombres positifs qui converge vers π est bornée supérieurement par π.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite convergeant vers 0 est ultimement monotone.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ La somme de deux suites divergentes diverge.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7.

/8

- Définissez « f est un $\mathrm{o}(x-1)$ lorsque $x \to 1$ ».

- Peut-on dire que la fonction nulle 0 est un $\mathrm{o}(x-1)$? Justifiez.

- A-t-on $|x-1| = \mathrm{o}(x-1)$? Justifiez.

- A-t-on $(x-1)\ln x = \mathrm{o}(x-1)$? Justifiez.

- Sachant que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ vérifie

$$f(x) = x\bigl(1 + \mathrm{o}(x-1)\bigr) \qquad \text{lorsque } x \to 1,$$

  donnez l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 1$. Expliquez votre démarche et justifiez en toutes les étapes.

Analyse mathématique I

Coté (19 mars 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. Pour un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$, on regarde la propriété suivante $/5$

$$\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ y < x/2 \tag{1}$$

- Montrez que $A =]0, +\infty[$ vérifie (1).

- Montrez que, quel que soit l'ensemble $A \subseteq]0, +\infty[$ vérifiant (1), on n'a *pas* :

$$\exists a \in A,\ \forall b \in A,\ a \leqslant b$$

- Peut-on dire que, si $A \subseteq \mathbb{R}$ vérifie (1), alors A n'est pas borné inférieurement ?