Analyse mathématique I

Coté (17 mars 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. En utilisant la définition en termes de suites de la continuité (à rappeler), montrez que si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, alors f est continue en a. /3

Analyse mathématique I

Coté (17 mars 2008)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/7

Question 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2\lambda^2 & \text{si } x < 0 \\ x + \lambda & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Esquissez le graphe de la fonction f pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

(b) Dites pour quelle(s) valeur(s) de λ la fonction f est continue sur son domaine. Pour la ou les valeurs de λ donnée(s), montrez que la fonction f est continue en tout point de son domaine. Citez les définitions et les résultats que vous utilisez et détaillez vos calculs.

(c) Dites si la fonction f est continue sur son domaine lorsque $\lambda = \pi$. Justifiez votre réponse.

Analyse mathématique I

Coté (17 mars 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Question 3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. $/4$

(a) Définissez

- « A est borné inférieurement » :

- « A est borné supérieurement » :

- « A est borné » :

(b) Montrez que A est borné si et seulement si A est borné inférieurement et supérieurement.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4. Calculez les limites suivantes, si elles existent. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/5

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)^4y^2}{(x-2)^4+y^4}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x-y}$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/8

Question 5. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite de nombres réels négatifs et strictement croissante converge vers 0.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite strictement décroissante de nombres positifs qui converge vers π est bornée inférieurement par π.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors il existe un n^* tel que $(x_n)_{n\geqslant n^*}$ est monotone.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ La somme de deux suites divergentes diverge.

Analyse mathématique I

Coté (17 mars 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 6. /6

(a) Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Donnez les formules qui définissent $|x|_2$ et $|x|_\infty$:

$|x|_2 =$ $\qquad\qquad$ $|x|_\infty \;=$

(c) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|x|_2 \leqslant \sqrt{N}\,|x|_\infty$.

(d) Montrez qu'il existe $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $|(x_1,x_2)|_2 = \sqrt{2}\,|(x_1,x_2)|_\infty$.

(e) Pour $N = 2$, interprétez géométriquement les faits (c) et (d). Expliquez votre graphique.

Analyse mathématique I

Coté (17 mars 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 7. /5

(a) Soient $E \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « a est l'infimum de E ».

(b) Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $A \subseteq B$. En utilisant la définition donnée au point (a), montrez que $\inf A \geqslant \inf B$.

(c) Calculez $\inf\{x^2 - y \mid 0 < x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y < 1\} \in [-\infty, +\infty]$.
Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 8.

/5

(a) Énoncez le théorème des valeurs intermédiaires « réduit ».

(b) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^x + x$.

- Esquissez le graphe de f.
- Prouvez que f possède (au moins) une racine.
- f possède-t-elle plusieurs racines ? Justifiez votre affirmation par des calculs (et pas seulement de manière graphique).

Analyse mathématique I

Coté (17 mars 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 9.

$/5$

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et $p \in \mathbb{R}^N$. Définissez « p est un point intérieur à A » et « p est un point adhérent à A ».

- On considère les trois ensembles suivants :

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 3\}, \qquad F = B_{|\cdot|_2}\big((1,1),2\big), \qquad G =]-1,1[$$

En utilisant les définitions données au point précédent, dites si

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(5,1)$ est un point intérieur à E.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $(1,1/2)$ est un point intérieur à F.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ 1 est un point adhérent à G.

Justifiez vos réponses ci-dessous (en détaillant vos calculs).

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 9 (suite). Si nécessaire, continuez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Coté (17 mars 2008)

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées. Les feuilles où la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. En utilisant la définition en termes de suites de la continuité (à rappeler), montrez que si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, alors f est continue en a. $/3$

Analyse mathématique I

Coté (17 mars 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/7

$$f(x) = \begin{cases} x^2/|x| & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Esquissez le graphe de la fonction f pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

(b) Dites pour quelle(s) valeur(s) de λ la fonction f est continue sur son domaine. Pour la ou les valeurs de λ donnée(s), montrez que la fonction f est continue en tout point de son domaine. Citez les définitions et les résultats que vous utilisez et détaillez vos calculs.

(c) Dites si la fonction f est continue sur son domaine lorsque $\lambda = \pi$. Justifiez votre réponse.

Question 2 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. /3

(a) Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f en $x = a$.

(b) Recherchez les coordonnées du point d'intersection de la tangente au graphe de f en $x = a$ avec l'axe des x.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 4. Calculez les limites suivantes, si elles existent. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /5

(a) $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{(x-2)^4 y^2}{(x-2)^4+y^4}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 y}{x-y}$

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

/8

Question 5. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite de nombres réels négatifs et strictement croissante converge vers 0.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite strictement décroissante de nombres positifs qui converge vers π est bornée inférieurement par π.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors il existe un n^* tel que $(x_n)_{n\geqslant n^*}$ est monotone.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ La somme de deux suites divergentes diverge.

Analyse mathématique I

Coté (17 mars 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 6. /6

(a) Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Donnez les formules qui définissent $|x|_2$ et $|x|_\infty$:

$|x|_2 =$ $|x|_\infty \ =$

(c) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|x|_2 \leqslant \sqrt{N}\,|x|_\infty$.

(d) Montrez qu'il existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $|(x_1,x_2)|_2 = \sqrt{2}\,|(x_1,x_2)|_\infty$.

(e) Pour $N = 2$, interprétez géométriquement les faits (c) et (d). Expliquez votre graphique.

Analyse mathématique I

Coté (17 mars 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 7. $/5$

(a) Soient $E \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « a est l'infimum de E ».

(b) Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $A \subseteq B$. En utilisant la définition donnée au point (a), montrez que $\inf A \geqslant \inf B$.

(c) Calculez $\inf\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x+\pi) \leqslant 0\} \in [-\infty, +\infty]$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Analyse mathématique I

Coté (17 mars 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 8.

/5

(a) Énoncez le théorème des valeurs intermédiaires « réduit ».

(b) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + \lambda x^2 + x - 1$ où λ est un paramètre réel positif.

- Calculez $f(1+\lambda)$.
- Montrez qu'il existe $\xi \in \,]0, +\infty[, \; f(\xi) = 0$. Détaillez votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 9. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. /4

(a) Définissez

- « A est borné inférieurement » :
- « A est borné supérieurement » :
- « A est borné » :

(b) Montrez que A est borné si et seulement si A est borné inférieurement et supérieurement.