Analyse mathématique I

Coté (16 mars 2009)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : ________

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom, sans section, ou mal remises ne seront pas corrigées et/ou pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez (en justifiant vos calculs) la limite suivante ou prouvez qu'elle n'existe pas : /3

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^6 \cdot y^3}{(x-1)^6 + y^6}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ et $a \in \mathbb{R}^N$. /6

(a) Définissez « f est continue en a ».

(b) Définissez « $\lim_{x\to a} f(x) = b$ », où $b \in \mathbb{R}^M$, en termes de ε-δ.

(c) En utilisant la définition donnée en (b), montrez que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$.

(d) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ est-elle continue en 1 ? Justifiez grâce à la définition donnée en (a).

Question 3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. /6

(a) Définissez par une formule quantifiée « a est le suprémum de A ».

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite).

(b) Définissez par une formule quantifiée « a est le maximum de A ».

(c) *À partir des définitions données en (a) et (b)*, justifiez l'existence ou la non-existence du maximum et du suprémum (dans $\mathbb{R}$) des ensembles A_1 et A_2 définis ci-dessous. Détaillez vos calculs (nous ne désirons cependant *pas* voir votre brouillon).

$$A_1 := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) \leqslant 0\right\} \qquad A_2 := \left\{|x^2 - 1| \;\middle|\; x \in [0,1]\right\}$$

Analyse mathématique I

Coté (16 mars 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Donnez une preuve des affirmations suivantes. Veillez à la précision de vos arguments. Votre rédaction doit clairement énoncer les définitions et les résultats que vous utilisez.

/8

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leqslant \varepsilon\big) \Rightarrow x = 0.$

(b) Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés. Montrez que $A \cup B$ est un ensemble borné.

(c) Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble $A - B := \{a - b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrez que $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$.

(d) Soit $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ une suite telle que $x_n \to 42$. Montrez qu'il existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel quel que $\forall n \geqslant n_1$, $x_n > \pi$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x/|x| & \text{si } x < -1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \\ \text{n'est pas définie} & \text{si } x \in [-1, 1[\end{cases}$$

/4

(a) Représentez graphiquement la fonction f. Expliquez brièvement votre démarche.

(b) La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ? Justifiez votre réponse.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6.

/5

- Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

- Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes quelconques sur $\mathbb{R}^N$. Montrez que la fonction $|||\cdot||| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|_1 + \|x\|_2$ définit une norme sur $\mathbb{R}^N$.

- Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$ et $x, y \in \mathbb{R}^N$. Montrez que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$. Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sir cette page.

Question 7. Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par /4

$$x_n = \left(\frac{1}{\lambda^3 - 7}\right)^n \quad \text{où } \lambda \text{ est un paramètre réel.}$$

Étudiez la convergence (au sens strict) de cette suite en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour la ou les valeurs de λ pour lesquelles vous affirmez la convergence, donnez la valeur de la limite. Veillez à la qualité de votre rédaction.

Analyse mathématique I

Coté (16 mars 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/8

Question 8. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le produit de deux suites divergentes est une suite divergente.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite croissante et non bornée supérieurement converge vers $+\infty$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On a $f([0,1]) = [f(0), f(1)]$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles tels que $A \subseteq B$. On a que $\sup A \in B$.

Analyse mathématique I

Coté (16 mars 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et $r \in \mathbb{R}^{>0}$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. On définit les deux propriétés P_1 et P_2 concernant un point $x \in \mathbb{R}^N$: /4

$$P_1(x) : \quad \exists a \in A,\ x \in B_{\|\cdot\|}(a, 2r),$$

$$P_2(x) : \quad \exists a' \in A,\ \exists y \in \mathbb{R}^N,\ x \in B_{\|\cdot\|}(y, r) \text{ et } a' \in B_{\|\cdot\|}(y, r).$$

Montrez que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^N$, $P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$.
INDICATION : Nous vous conseillons de faire des dessins pour vous *guider* dans l'argumentation.