Analyse mathématique I

Coté (15 mars 2010)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- Le coté dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /8

(a) Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

(b) Montrez que si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, alors $\exists C > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \|x\| = \frac{1}{C}|x|$.

(c) Soient $x, y \in \mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Montrez que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$.

(d) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a » en termes de suites.

(e) Soient $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$ et $a \in \mathbb{R}^N$. En utilisant la définition précédente, montrez que la fonction $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est continue en a.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Coté (15 mars 2010)

Nom :

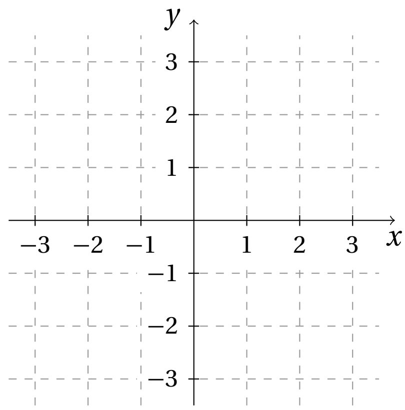
Prénom :

Section : Mathématique

Question 2. /6

(a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrez que $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Déduisez-en que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = 0$. Expliquez votre démarche.

(b) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$. Représentez sur le graphe ci-dessous le domaine de f. Calculez, si elle existe, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.



Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

$\big/ 5$

Question 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} |x| \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez sa fonction dérivée $\partial_x f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Veillez à donner des justifications *complètes* de vos affirmations.

Analyse mathématique I

Coté (15 mars 2010)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -\lambda - 1 + x^2 + \lambda\, e^x$ où λ est un paramètre réel. Montrez que pour tout $\lambda \in]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution x dans $[0, +\infty[$. Veillez à justifier votre réponse *en détail*. $/5$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 5. *Les étudiants qui ont eu une note supérieure ou égale à 11,8 à l'examen de janvier sont dispensés de cette question. Si elle est néanmoins faite, les points compteront comme bonus.* /8

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par

$$x_n = \frac{n^{42}}{n!}.$$

Répondez aux questions suivantes en veillant à justifier vos dires.

(a) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ou décroissante ?

(b) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

(c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

(d) Calculez $\inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \in [-\infty, \infty]$. Justifiez votre réponse en utilisant une des définitions équivalentes d'infimum (vous expliciterez celle que vous utilisez).

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 5 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Question 6. En utilisant la définition suivante de continuité d'une fonction f en a, $/4$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in [a-\delta, a+\delta],\ |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon,$$

montrez que la fonction $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x^2$ est continue sur son domaine.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/5

Question 7. Soient $r > 0$, $a \in \mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$.

- Définissez $B_{\|\cdot\|}[a, r]$.

- Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$. Montrez que les propositions suivantes sont équivalentes :

  (a) A est borné,

  (b) il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^N$ et un nombre fini de réels positifs $r_1, \ldots, r_k \in]0, +\infty[$ tels que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B[x_i, r_i]$.

Si vous ne pouvez faire le cas général, restreignez vous au cas $k = 2$ (pour une note moindre).

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/6

Question 8. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par une preuve brève ou un contre-exemple.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Si $\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} f(x)$, alors f est continue en a.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tels que $A \subseteq B$. Alors $\sup A \in B$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et que $a \in \operatorname{Dom} f$, alors f est continue en a.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers 0 mais en restant toujours différent de 0, alors $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction (pas nécessairement continue) et $x^* \in [a,b]$. Montrez que les deux propositions suivantes sont équivalentes : /4

(a) $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant f(x^*)$,

(b) $\max f\big([a,b]\big)$ existe et vaut $f(x^*)$.

Veillez à la qualité de votre rédaction (qui sera notée).

Analyse mathématique I

Coté (15 mars 2010)

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sur lesquelles la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- Le coté dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /6

(a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrez que $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Déduisez-en que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4} = 0$. Expliquez votre démarche.

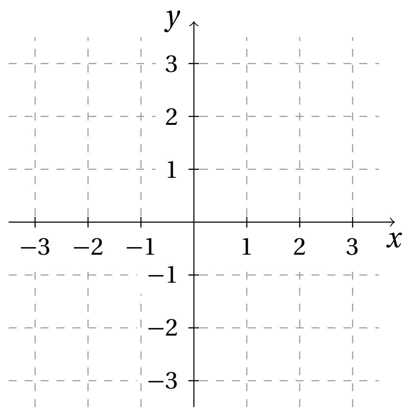
Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse au point (a).

(b) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$. Représentez sur le graphe ci-dessous le domaine de f. Calculez, si elle existe, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.



Question 2. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $\lambda \in]0, +\infty[$. Montrez que, sous l'hypothèse que $\max(\lambda A)$ existe, on a que $\max A$ existe et $\max A = \frac{1}{\lambda} \max(\lambda A)$. /4

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

/5

Question 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} |x| \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez sa fonction dérivée $\partial_x f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Veillez à donner des justifications *complètes* de vos affirmations.

Analyse mathématique I

Coté (15 mars 2010)

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 4. /8

(a) Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

(b) Montrez que si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, alors $\exists C > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \|x\| = \frac{1}{C}|x|$.

(c) Soient $x, y \in \mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Montrez que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$.

(d) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a » en termes de suites.

(e) Soient $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$ et $a \in \mathbb{R}^N$. En utilisant la définition précédente, montrez que la fonction $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est continue en a.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 5. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -\lambda - 1 + x^2 + \lambda\, e^x$ où λ est un paramètre réel. Montrez que pour tout $\lambda \in \,]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution x dans $[0, +\infty[$. Veillez à justifier votre réponse *en détail*. $/5$

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 6. *Les étudiants qui ont eu une note supérieure ou égale à 11,8 à l'examen de janvier sont dispensés de cette question. Si elle est néanmoins faite, les points compteront comme bonus.* /8

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par

$$x_n = \frac{n^{42}}{n!}.$$

Répondez aux questions suivantes en veillant à justifier vos dires.

(a) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ou décroissante ?

(b) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

(c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

(d) Calculez $\inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \in [-\infty, \infty]$. Justifiez votre réponse en utilisant une des définitions équivalentes d'infimum (vous expliciterez celle que vous utilisez).

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Coté (15 mars 2010)

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 7. Soient $r > 0$, $a \in \mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. $/5$

- Définissez $B_{\|\cdot\|}[a, r]$.

- Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$. Montrez que les propositions suivantes sont équivalentes :

  (a) A est borné,

  (b) il existe un nombre fini de points $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^N$ et un nombre fini de réels positifs $r_1, \dots, r_k \in]0, +\infty[$ tels que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B[x_i, r_i]$.

  Si vous ne pouvez faire le cas général, restreignez vous au cas $k = 2$ (pour une note moindre).

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

/6

Question 8. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par une preuve brève ou un contre-exemple.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Si $\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} f(x)$, alors f est continue en a.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tels que $A \subseteq B$. Alors $\sup A \in B$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et que $a \in \operatorname{Dom} f$, alors f est continue en a.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers 0 mais en restant toujours différent de 0, alors $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.