

Analyse mathématique I

Coté

(20 décembre 2010)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom, sans section, ou mal remises ne seront pas corrigées et/ou pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Écrivez le domaine de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x^2-9}\right) + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{9-x}}{x}}$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est !). Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

/5

Analyse mathématique I

Coté (20 décembre 2010)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Coté (20 décembre 2010)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2. Calculez les limites suivantes et justifiez vos résultats en utilisant les définitions en ε - δ . La qualité de votre rédaction est importante.

/4

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x$

■ $\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{3}{(x-2)^4}$

Analyse mathématique I

Coté (20 décembre 2010)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Calculez, si elle existe, la limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} \sin \sqrt{2x + 1}$. Détaillez vos calculs et justifiez chacune de vos affirmations à partir des résultats vus au cours.

/2

Question 4. On considère l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x+1)(x-2) < 0\}$. Calculez, s'ils existent, $\sup E$ et $\max E$. Veuillez rappeler les définitions que vous utilisez et détaillez vos calculs.

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

/5

- (a) Définissez « $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow a$ ».
- (b) Définissez « f est bornée supérieurement au voisinage de a ».
- (c) Montrez qu'on ne peut avoir à la fois $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ et f bornée supérieurement au voisinage de a . Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère les trois propositions suivantes :

/8

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in [a - \delta, a + \delta], \quad f(x) \geq \varepsilon \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}, \exists \delta' > 0, \forall x \in [a - 2\delta', a + 2\delta'], \quad f(x) \geq \varepsilon' \tag{2}$$

$$\forall \varepsilon'' \geq 1, \exists \delta'' > 0, \forall x \in [a - \delta'', a + \delta''], \quad f(x) > \varepsilon'' \tag{3}$$

- Montrez que les propositions (1) et (2) sont équivalentes. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs en veillant à la qualité de votre rédaction.
- Les propositions (1) et (3) sont-elles équivalentes ? Justifiez votre réponse par une preuve détaillée ou un contre-exemple explicite.

Analyse mathématique I

Coté (20 décembre 2010)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{(x^{1/3} + 1)^p}{2x^p + 1}$$

où p est un paramètre réel. Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en fonction du paramètre p . Justifiez vos affirmations.

/4