Analyse mathématique I

Test (14 mars 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer ce test.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom, sans section, ou mal remises ne seront pas corrigées et/ou seront pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Définissez : $/4$

- $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$;

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée au voisinage de $a \in \mathbb{R}$;

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction décroissante ;

- $A \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble *non* borné inférieurement.

Analyse mathématique I

Test (14 mars 2011)

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

(a) Définissez « f est continue en a » en ε-δ.

(b) En utilisant la définition précédente, montrez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est continue en tout réel a strictement positif.

Analyse mathématique I

Test (14 mars 2011)

Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 3. Soient les ensembles

$$A = \left\{ \frac{2n}{n+2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \cos x > 0 \right\}.$$

Calculez, s'ils existent, $\min A \in \mathbb{R}$, $\inf A \in [-\infty, +\infty]$, $\sup B \in [-\infty, +\infty]$, $\max B \in \mathbb{R}$. Citez les définitions et les résultats que vous utilisez.

Analyse mathématique I

Test (14 mars 2011)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Pour cette question, veuillez citer les définitions et les résultats que vous utilisez. /8

(a) Montrez que la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en $x = 42$.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrez qu'on ne peut avoir à la fois $f(x) \xrightarrow[x \to -1]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \to -1]{} -\infty$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite).

(c) Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Montrez qu'on a $\inf(A \cap B) \geqslant \max\{\inf A, \inf B\}$ mais qu'on n'a pas nécessairement $\inf(A \cap B) = \max\{\inf A, \inf B\}$.

(d) Soient $x, y \in \mathbb{R}^3$ définis par $x = (1, -2, 3)$ et $y = (0, -4, -4)$. Calculez $|x-y|_2$, $|x-y|_1$ et $|x-y|_\infty$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. On considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/4

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} |x| - \lambda & \text{si } x \leqslant 0, \\ x^2 - 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Représentez graphiquement f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) *réelles* de λ, f_λ est-elle continue ? La qualité de votre justification est importante. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, justifiez que la fonction est continue *sur son domaine*.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

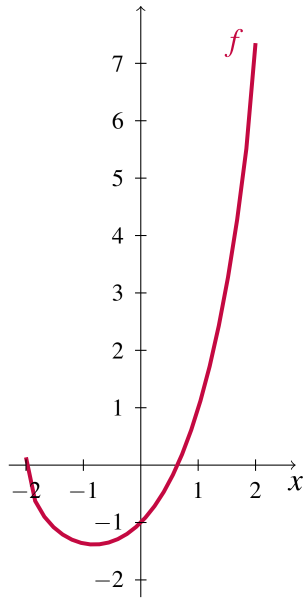
Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 6. Montrez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x - \sqrt{4 - x^2}$ possède une et une seule racine sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Le graphe de cette fonction est dessiné ci-dessous. La fonction f possède-t-elle d'autres racines sur $\mathbb{R}$? Justifiez chacune de vos affirmations (analytiquement, argumenter à partir du graphique n'est pas suffisant).



Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Étudiez la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 > 0$ (non davantage précisé) et $x_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}x_n^2}$. Calculez la limite si elle existe. $/5$