Analyse mathématique I

Coté (12 mars 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

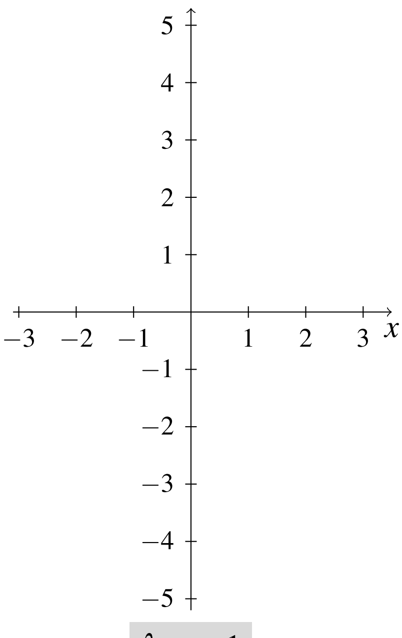
- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : /4

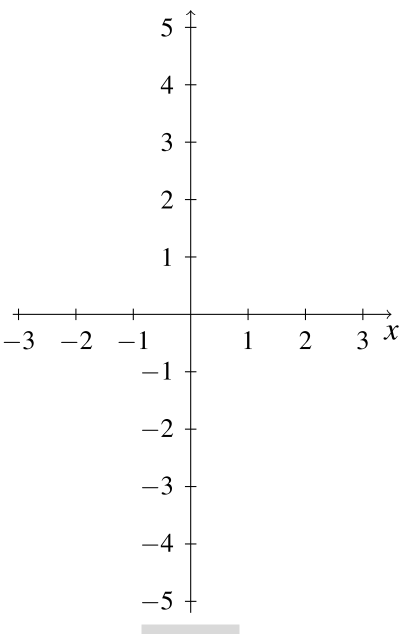
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1, \\ |x - \lambda| & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

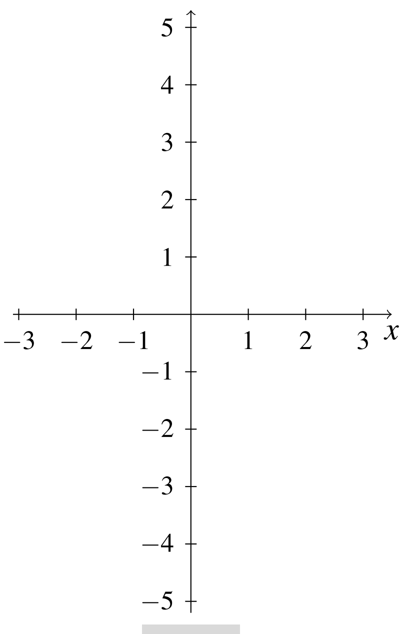
(a) Esquissez le graphe de la fonction f pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.



$\lambda = -1$



$\lambda = 0$



$\lambda = 1$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 1 (suite).

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que, pour la ou les valeurs trouvées, vous devez montrer la continuité de f en tout point de $\mathbb{R}$. Veuillez énoncer les définitions et les résultats que vous utilisez. Veillez à la qualité de vos justifications.

Analyse mathématique I

Coté (12 mars 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x - \cos x$. /4

(a) Montrez qu'il existe (au moins) une racine de f dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Montrez que cette racine est unique sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(c) f possède-t-elle d'autres racines sur $[0,+\infty[$? Justifiez votre réponse.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. /4

(a) Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D = \operatorname{Dom} f$. Définissez en ε-δ le fait que f soit continue en a.

(b) En utilisant directement la définition donnée au point précédent, montrez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0, \\ \sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Analyse mathématique I

Coté (12 mars 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. /5

(a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est le maximum de A ».

(b) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est le suprémum de A ».

(c) Calculez, s'ils existent, le maximum et le suprémum des deux ensembles suivants :

$$B := \{x^3 - x^2 - 2x \mid x \in [-1,2]\} \qquad \text{et} \qquad C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x^2 - 2x < 0\}.$$

Justifiez vos réponses en montrant que les définitions que vous avez données aux points (a) et (b) sont satisfaites (ou ne peuvent l'être en cas de non-existence).

Analyse mathématique I

Coté (12 mars 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Donnez une preuve des affirmations suivantes. Votre raisonnement doit intégrer les définitions et les résultats que vous utilisez. /8

(a) Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés supérieurement. Considérons l'ensemble $A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrez que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(b) Toute suite croissante et non bornée supérieurement converge vers $+\infty$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite).

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0.$

(b) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ et $\lim_{x\to a} f(x) = b_2$, alors $b_1 = b_2$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

/5

$$\begin{cases} x_0 \in [1,+\infty[, \\ x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}, \end{cases}$$

Étudiez la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en discutant au besoin selon la valeur de x_0. Expliquez votre raisonnement et justifiez vos affirmations.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Justifiez que fonctions que vous donnez ci-dessous satisfont les conditions demandées ou justifiez l'impossibilité de trouver une telle fonction.

/5

- Donnez, si possible, un exemple de fonction[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f([0,1]) \neq [f(0), f(1)]$.

- Donnez, si possible, un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(x+1)$ et f n'est pas croissante.

- Donnez, si possible, un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f soit continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \leqslant x$ pour tout $x > 0$ et $f(x) \geqslant \mathrm{e}^x$ pour tout $x < 0$.

[1] Pour rappel, la notation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sous entend que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.