Analyse mathématique I

Coté

(11 mars 2013)

Nom :

Prénom :

Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et $f(a) > 0$. Sous ces conditions, montrez que $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in \,]a-r, a+r[,\ f(x) > 0$. $/3$

Analyse mathématique I

Coté (11 mars 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Soit l'équation $e^x - 3 = \lambda \ln x$ où λ est un paramètre réel tel que $0 < \lambda < e$. Montrez rigoureusement que cette équation possède une unique solution dans $]1, +\infty[$ quel que soit $\lambda \in]0, e[$. Expliquez votre démarche, détaillez vos calculs et énoncez les résultats utilisés.

$/4$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3.

/4

(a) Énoncez le théorème de la moyenne et donnez en une interprétation géométrique. Le lien entre l'énoncé et le graphique doit être clairement établi.

(b) Démontrez que, si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) < 0$, alors f est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4.

/6

(a) Soient $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in D$. Définissez « f est continue en a » en termes d'ε-δ.

(b) En utilisant directement la définition donnée au point précédent, montrez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geqslant 0, \\ \sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

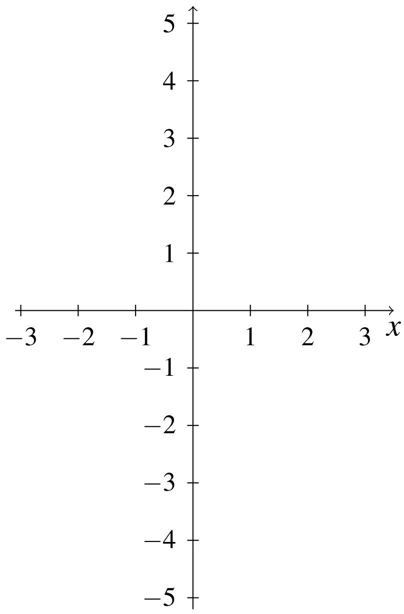
/6

Question 5. Soit $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

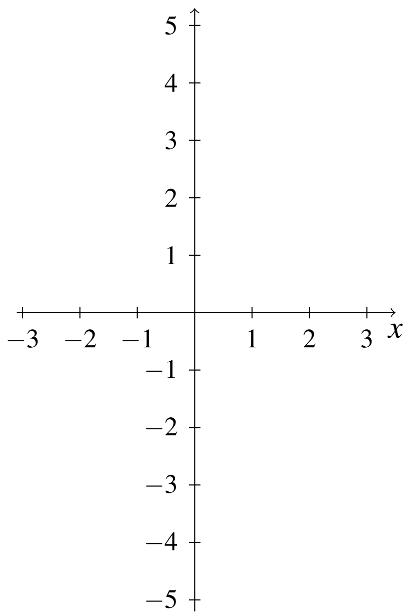
$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x^2 + |\lambda| & \text{si } x \leqslant 0, \\ \lambda x + 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

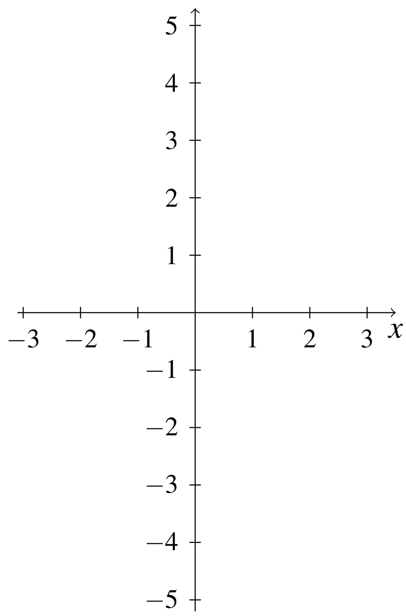
(a) Esquissez le graphe de la fonction f pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.



$\lambda = -1$



$\lambda = 0$



$\lambda = 1$

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que, pour la ou les valeurs trouvées, vous devez montrer la continuité de f en tout point de $\mathbb{R}$. Veuillez énoncer les définitions et les résultats que vous utilisez. Veillez à la qualité de vos justifications.

(c) En reprenant chaque valeur de λ pour laquelle vous avez montré la continuité de f_λ, étudiez la dérivabilité de f_λ sur $\mathbb{R}$. Il vous est donc demandé de préciser en quel(s) point(s) f_λ est dérivable et en quel(s) points(s) elle ne l'est pas.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Calculez le développement de Taylor à l'ordre 3 en 0, avec reste exprimé en terme de o, de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{e^{-x^2}}{1+2x^2} + 1\right)$$

/4

Détaillez ci-dessous vos calculs.

Analyse mathématique I

Coté (11 mars 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le polynôme

$$p(x) := 2 - 2x + x^2$$

est de développement de Taylor de f en 1 d'ordre 2. Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point $(1, f(1))$.

/3

Question 8. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

/4

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = f(a)$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute fonction continue sur $A :=]-\infty, 1[$ atteint son minimum sur A (c'est-à-dire $\exists y \in A,\ \forall x \in A,\ f(x) \geqslant f(y)$).

Analyse mathématique I

Coté (11 mars 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

/6

Question 9. Donnez une preuve des affirmations suivantes. Votre raisonnement doit clairement mentionner les définitions et les résultats que vous utilisez.

(a) $\mathrm{o}(x) + \big(\mathrm{o}(x)\big)^2 = \mathrm{o}(x)$.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} f$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

(c) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si $f\big([a,b]\big) \subseteq [a,b]$, alors il existe (au moins) un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. (INDICATION : un dessin peut vous aider.)