Analyse mathématique I

Examen (17 janvier 2001)

Nom :
Prénom :
Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi (voire plus) *importantes* que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Le manque d'explication ou le « bla bla » sont honnis[1] !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille de la *question précédente* pour finir votre réponse !

Question 1. La suite $\left(\frac{1}{e^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ? Justifiez.

[1]**honnir** *v. tr.* Couvrir publiquement de honte. Je ne laisserai personne me honnir. — *Vieilli ou litt.* Être honni de, par qqn, lui inspirer de la haine et du mépris. || *Honni soit qui mal y pense !* : honte à celui qui y voit du mal.
Dictionnaire Universel Francophone © 1997 HACHETTE/EDICEF. (www.francophonie.hachette-livre.fr)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $x^\star \in \mathbb{R}$.

- Définissez « x_n converge vers $x^\star$ lorsque $n \to \infty$ ».
- Montrez à partir de cette définition que $\dfrac{1-n}{1+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$.

Analyse mathématique I

Examen (17 janvier 2001)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $b_0 \in \mathbb{R}$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + 3)$, $n \geqslant 0$.

- Montrez que la suite $c_n := b_n - 3$ est une suite géométrique.
- La suite (b_n) converge-t-elle et, le cas échéant, vers quelle limite ? Justifiez vos affirmations.

Analyse mathématique I

Examen (17 janvier 2001)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ la suite définie par

$$z_n = \frac{7^{n+1}\boldsymbol{i} + 14\cdot 3^n}{7^n\,(1+\boldsymbol{i}\sqrt{2})}.$$

La suite (z_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminez sa limite.

Question 5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^3$ la suite définie par $v_n = \left(\frac{5^n}{n!}, \frac{n^8}{3^n}, \sqrt[n]{27}\right)$. Calculez $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Analyse mathématique I

Examen (17 janvier 2001)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \dfrac{x^5y+xy^5}{x^4+y^4}$. Calculez la limite de $f(x,y)$ pour $(x,y) \to (0,0)$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Définissez

- l'adhérence d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^N$;
- la notion de suite de Cauchy ;
- le fait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

Question 8. Justifiez vos réponses. Soient les ensembles

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\} \quad \text{et} \quad B := \left\{\cos\left(\pi + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}.$$

- Calculez, s'il existe, $\sup A$.
- Calculez, s'il existe, $\max A$.
- Calculez, s'il existe, $\inf B$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Considérons l'ensemble $\mathbb{P} := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Pour $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}$, on définit

$$\|p\|_{\mathbb{P}} := |a_0| + |a_1| + |a_2|.$$

Montrez que $\|\cdot\|_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ est une norme.

Analyse mathématique I

Examen (17 janvier 2001)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Complétez la dernière colonne par « vrai » ou « faux ». Justifiez vos réponses ci-dessous.

1	Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ est convergente dans $\mathbb{Q}$.	
2	Toute suite convergente est soit croissante soit décroissante.	
3	Toute suite décroissante converge vers 0.	
4	L'ensemble $\{0\} \cup \{1\}$ est fermé.	
5	Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est soit ouvert, soit fermé.	
6	Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq]0,+\infty[$ est croissante, alors $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.	

Justifications. (Celles-ci peuvent être des contre-exemples, des théorèmes vus au cours, des *petits* raisonnements,...).