# Analyse mathématique I

## Examen (5 juin 2001)

| Nom : |
|---|
| Prénom : |
| Section : |

- Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi (voire plus) *importantes* que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la longueur des réponses attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille de la *question précédente* pour finir votre réponse !
- Cet examen comporte 11 pages. Cependant, les deux dernières pages ($\geqslant 10$) ne concernent que ceux qui repassent l'examen de janvier.

---

Question 1. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ en termes de petit o de la fonction

$$f(x) := \sin\Big(\frac{\operatorname{ch} x}{1+4x} - 1\Big).$$

(Rappel : par définition, $\operatorname{ch} x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$.) Utilisez l'approximation Taylorienne ci-dessus pour calculer la limite :

$$\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{f(x) + 4x}{\cos(2x) - 1}\ .$$

Explicitez vos calculs et commentez en les étapes importantes.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 1 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

| Nom : |
| --- |
| Prénom : |
| Section : |

Question 2. Étudiez la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-3\boldsymbol{i})^{2n}\, 2^{2n-1}}{10^n\,(2n)!}\ .$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\partial_x^2 u + \partial_x u - 6u = x^2 + 2\mathrm{e}^{2x} \qquad (*)$$

- Calculez toutes les solutions de cette équation.
- Existe-t-il une solution $u$ de l'équation $(*)$ qui vérifie $u(0) = 0$ et $\partial_x u(0) = 0$ ? Si oui, quelle est-elle ?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

| |
|---|
| Nom : |
| Prénom : |
| Section : |

Question 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \big((x-y)^2, x + 4xy\big).$$

- Calculez la matrice Jacobienne $\dfrac{\partial f}{\partial(x,y)}$ au point $(1,1)$.
- Donnez $\partial f(1,1)(h)$ où $h \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur unitaire faisant un angle de $45°$ avec l'axe des $x$.

| |
|---|
| Nom : |
| Prénom : |
| Section : |

Question 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Appelons $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$z(x, y) := yf(x^2 - y^2).$$

Montrez que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{y} .$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Intégrez la fonction $f(x, y) = x - 2y$ sur le triangle de sommets $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction paire, continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$. Montrez qu'il existe un point $s \in\, ]-1, 1[$ tel que $\partial f(s) = 0$.

*Indiquez clairement les différentes étapes de votre raisonnement. Si vous utilisez des résultats du cours, donnez-en leurs énoncés.*

Analyse mathématique I

Examen (5 juin 2001)

| Nom : |
|---|
| Prénom : |
| Section : |

*Uniquement pour ceux qui présentent à nouveau l'examen du premier semestre :*

Question 8. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Indiquez votre réponse dans la colonne de droite. Justifiez cette réponse en dessous du tableau par un argument ou un contre-exemple. Lorsque vous répondez « faux », modifiez l'affirmation pour la rendre vraie.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Il est possible de trouver deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ de $\mathbb{R}$ telles que $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ et $\dfrac{x_n}{y_n} \to \pi$. | |
| 2 | Si une suite $(x_n)$ est décroissante et $x_n \geqslant 0$, alors $x_n \to 0$. | |
| 3 | La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x/\lvert x\rvert & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue. | |
| 4 | Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est une fonction continue et $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, alors $f(0) = 0$. | |
| 5 | Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Si $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$, alors $x^* > 0$. | |
| 6 | Une intersection infinie d'ouverts est ouverte. | |
| 7 | $\mathbb{R}$ est compact. | |

**Justifications.** *(Une réponse sans justification ne vaut pas grand chose...)*

| |
|---|
| Nom : |
| Prénom : |
| Section : |

Question 8 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.