Analyse mathématique I

Examen (18 janvier 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications* sont aussi *importantes* que les résultats. ***Veillez donc à justifier toutes vos réponses !***
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue. N'employez *pas* le dos de la feuille *précédente* !

Question 1. Parmi les définitions proposées, cochez la ou les bonnes.

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée supérieurement
  - ☐ $\forall R \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\quad x_n < R$
  - ☐ $\forall R \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad x_n \leqslant R$
  - ☐ $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall R \in \mathbb{R},\quad x_n < R$
  - ☐ $\exists R \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad x_n \leqslant R.$
- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$
  - ☐ $\forall \rho \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\quad x_n \leqslant \rho$
  - ☐ $\forall \rho \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant \rho,\quad x_n \leqslant N$
  - ☐ $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists \rho \in \mathbb{R},\ \exists n \geqslant N,\quad x_n \leqslant \rho$
  - ☐ $\exists \rho \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad x_n \leqslant \rho$
- A est ouvert
  - ☐ $\forall (x_n) \subseteq A,\ \exists x^* \in A,\quad x_n \to x^*$
  - ☐ $\exists (x_n) \subseteq A,\ \exists x^* \notin A,\quad x_n \to x^*$
  - ☐ $\forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\quad \mathrm{B}(x,\varepsilon) \subseteq A$
  - ☐ $\exists x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\quad \mathrm{B}(x,\varepsilon) \subseteq A$

Analyse mathématique I

Examen (18 janvier 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2.

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $x^* \in \mathbb{R}$. Définissez « (x_n) converge vers x^* ».

(b) Montrez, à partir de cette définition, que

$$\frac{-n+1}{2n+5} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{2}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite).

(c) En utilisant *uniquement*[1] (a) et (b), prouvez que

$$\text{si } a_n \to a, \text{ alors} \quad a_n + \frac{-n+1}{2n+5} \xrightarrow[n\to\infty]{} a - \frac{1}{2}.$$

[1]Cela signifie que vous pouvez utiliser (a) et (b) mais que tout le reste doit être démontré.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soient les ensembles

$$A := \left\{ \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\right) : n \in \mathbb{N}_0 \right\} \qquad \text{et} \qquad B := \left\{ 2 + \frac{(-5)^n}{n!} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Calculez, s'ils existent,

- $\inf A$
- $\sup A$
- $\inf B$
- $\sup B$
- $\min A$
- $\max B$

Les réponses ne suffisent pas. Justifiez les !

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4.

- Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a ».

- Montrez, à partir de la définition que vous venez de donner, que
  (a) la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ est continue en 3.
  (b) la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \cos(xy)(x^2 + y^2)$ est continue en $(0, 0)$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 > 1, \qquad v_{n+1} = \sqrt{3v_n - 2}\,.$$

Étudiez, en fonction de v_0, la convergence de (v_n) et calculez sa limite lorsqu'elle existe.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad x_n = n^\alpha.$$

Pour quelles valeurs de α la suite (x_n) converge-t-elle et quelle est alors sa limite ? Justifiez en détail votre réponse.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Étudiez la convergence des suites suivantes et calculez leur limite, si elle existe. Justifiez vos réponses (par autre chose que « on l'a vu en séance d'exercices » !).

- $x_n := 2 + \left(\frac{2\boldsymbol{i} - 1}{7}\right)^n$
- $y_n := \left(\frac{\pi^n}{n!}, \frac{(2n+1)^7(n^2+4)}{2n^3(4n^2+3)^3}, \frac{\sin n}{n^2}\right)$

Analyse mathématique I

Examen (18 janvier 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Montrez que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\exists R \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leqslant R$

(b) $\exists R' \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| < R'$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Soient deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ définies sur $\mathbb{R}^N$. Supposons que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. Montrez que, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$, alors elle l'est également pour $\|\cdot\|_2$.