Analyse mathématique I

Nom :
Prénom :
Section :

Examen (4 juin 2002)

- Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi (voire plus) *importantes* que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Allez droit au but !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille de la *question précédente* pour finir votre réponse !

Question 1. Étudiez la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\boldsymbol{i}-1)^n}{1+3^n\boldsymbol{i}} .$$

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Soient f et g les fonctions définies par

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 : (u,v,s,t) \mapsto (u^2 - v^3 - s, 3t + s^4),$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (2xy + x^2, 4y - x).$$

- Calculez la matrice Jacobienne $\dfrac{\partial f}{\partial(u,v,s,t)}$ au point $(-1,1,0,2)$.
- Donnez la dérivée $\partial(g \circ f)(-1,1,0,2) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Donnez le développement de Taylor d'ordre 4 en 0 en termes de petit o de la fonction

$$f(x) := \operatorname{sh}\Big(\frac{e^{2x}}{1+x^2} - 1\Big).$$

(Rappel : par définition, $\operatorname{sh} x := (e^x - e^{-x})/2$.) Utilisez l'approximation Taylorienne ci-dessus pour calculer la limite :

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x) - 2x}{2\sqrt{1+x^2} + \ln(1+x) - x - 2} .$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t^2 v - 2\partial_t v = \mathrm{e}^{2t} + t^2 - 1 \qquad (*)$$

- Calculez toutes les solutions de cette équation.
- Existe-t-il une ou plusieurs solutions v de l'équation $(*)$ qui vérifient $v(0) = \frac{1}{8}$ et $\partial_t v(0) = 1$? Si oui, donnez-les toutes.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

- Argumentez brièvement le fait que f soit continue en tout point $x \neq 0$.

- Prouvez, à partir de la définition de continuité en ε, δ, que f est continue en 0.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

- On définit l'épigraphe de f comme étant l'ensemble

$$\operatorname{épi} f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leqslant y\}.$$

Montrez que épi f est fermé.

Analyse mathématique I

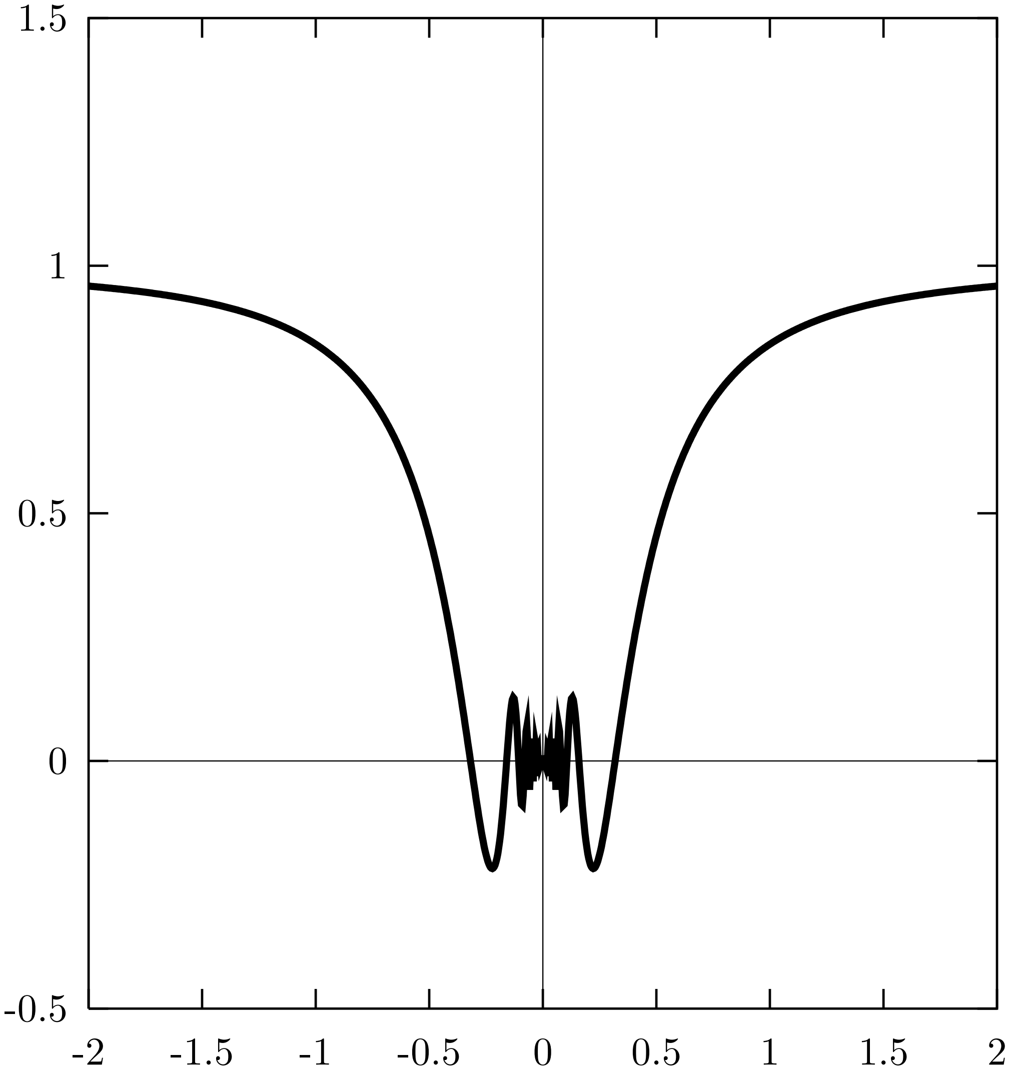
Examen (4 juin 2002)

Nom :

Prénom :

Section :

■ Sur le dessin ci-dessous, on a tracé le graphe de f. Hachurez la région du plan qui correspond à épi f.



■ L'ensemble épi f est-il compact ? Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit la fonction $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^N$ la fonction définie par

$$w(t,x,y) = f\big(u(t,x), v(t,y)\big)$$

pour $t \in \mathbb{R}$ où u et v sont les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$u(t,x) = x + at \quad \text{et} \quad v(t,y) = y + bt.$$

Montrez que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}\ .$$

Pour ceux qui ne représentent pas la matière de janvier, l'examen s'arrête ici.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Pour ceux qui représentent la matière de janvier.

Question 7. Cochez la ou les bonnes réponses dans les équivalences suivantes :

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ est bornée ssi
  - ☐ elle est minorée et majorée
  - ☐ elle converge
  - ☐ $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant C$
  - ☐ $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- L'ensemble B est l'adhérence de A ssi
  - ☐ $B = \complement A$
  - ☐ $\complement B = \operatorname{int} \complement A$
  - ☐ $A \subseteq B$ et B est fermé
  - ☐ B est fermé et $\forall x \in B,\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 ssi
  - ☐ f est dérivable en x_0
  - ☐ il existe une suite (x_n) telle que $f(x_n)$ converge vers $f(x_0)$
  - ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta$
  - ☐ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe

Question 8. Soient les ensembles

$$A := \{\sin x : x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad B := \{\operatorname{arctg} x : x \in \mathbb{R}\}.$$

Donnez, si elles existent, les valeurs de

- $\sup A$
- $\max A$
- $\sup B$
- $\max B$

Justifiez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2002)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 9. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ et $x^* \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un nombre réel $c \in [0,1[$ tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - x^*| \leqslant c|x_n - x^*|.$$

Prouvez que, pour tout n, $|x_n - x^*| \leqslant c^n\,|x_0 - x^*|$ et déduisez-en que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Rappelons que

$$E^{2,\mu} := \left\{ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u(x) = (a+bx+cx^2)\mathrm{e}^{\mu x} \text{ pour certains } a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour $u = (a+bx+cx^2)\mathrm{e}^{\mu x} \in E^{2,\mu}$, posons $\|u\| := |a|+|b|+|c|$.

Montrez que $\|\bullet\| : E^{2,\mu} \to \mathbb{R}$ définit une norme sur $E^{2,\mu}$.