Analyse mathématique I

Examen (20 août 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi (voire plus) *importantes* que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Allez droit au but !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille de la *question précédente* pour finir votre réponse !

Question 1. Étudiez la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(\boldsymbol{i}-1)^n}{2^n+3\boldsymbol{i}} .$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$x_n = \frac{b \cdot n^p + 36n^3 - 7}{n^{13} + 4n^2}$$

où b et p sont des paramètres réels.
Déterminez la ou les valeurs de b et p telles que la suite (x_n) satisfasse les conditions ci-dessous.

(a) (x_n) converge vers $+\infty$.

(b) (x_n) converge vers π.

(c) (x_n) converge vers 0.

Justifiez vos réponses et énoncez aussi les propriétés que vous utilisez.

Analyse mathématique I

Examen (20 août 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit $(v_n) \subseteq \mathbb{R}$ une suite telle que

$$\text{pour tout } n, \quad |v_{n+1} - v_n| \leqslant 2^{-n}.$$

(a) Montrez que la suite (v_n) est de Cauchy.

(b) La suite (v_n) est-elle convergente ?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Soit w la fonction définie par

$$w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sin(x^2 y) + e^{y-x}.$$

Donnez une équation cartésienne du plan tangent au point $\big(1, 1, f(1,1)\big)$.

Analyse mathématique I

Examen (20 août 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction est-elle continue sur son domaine de définition ? Si ce n'est pas le cas, dites quels sont ses points de continuité et de discontinuité.
Veuillez donner tous les détails et justifications supportant votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Donnez le développement de Taylor d'ordre 4 en 0 en termes de petit o de la fonction

$$f(x) := \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\operatorname{ch} 2x}.$$

(Rappel : par définition, $\operatorname{ch} x := (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$.) Utilisez l'approximation Taylorienne ci-dessus pour calculer la limite :

$$\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{f(x) + x - 1}{3\sqrt[3]{1+x^2} - 3} .$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Analyse mathématique I

Examen (20 août 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\partial_x^2 u - 2\partial_x u - 3u = x(1 + \mathrm{e}^{3x}) \qquad (*)$$

- Calculez toutes les solutions de cette équation.
- Existe-t-il une ou plusieurs solutions u de l'équation $(*)$ qui vérifient $u(0) = 2$ et $\partial_x u(0) = 0$? Si oui, donnez les toutes.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Analyse mathématique I

Examen (20 août 2002)

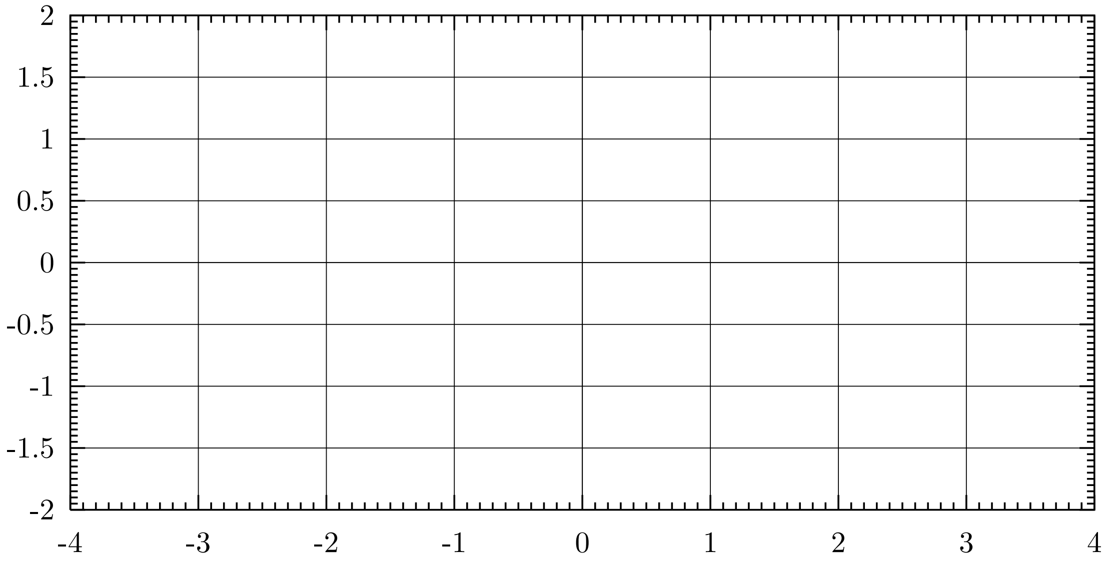
Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Soit l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leqslant 1\}$.

- Représentez graphiquement l'ensemble E.



- Montrez que E est fermé.

- L'ensemble E est-il compact ? Justifiez.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 9. Soit la fonction $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xy + x\varphi(y/x)$$

où $D := \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Montrez que, pour tout $(x,y) \in D$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = xy + f(x,y) \ .$$