Analyse mathématique I

Examen (8 octobre 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Étudiez la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\boldsymbol{i}-1)^{2n}\,4^{n-1}}{5^n\,(2n)!}\,.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\partial^2 u - 3\partial u = x + 2\mathrm{e}^{-2x}. \qquad (*)$$

- Calculez toutes les solutions de cette équation.
- Existe-t-il une ou plusieurs solutions u de l'équation $(*)$ qui vérifient $u(0) = u(1)$ et $\partial_x u(0) = \partial_x u(1)$? Si oui, donnez les toutes. *Justifiez votre réponse.*

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Analyse mathématique I

Examen (8 octobre 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soient E et F les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par

$$E := \{x : x \neq 0 \text{ et } |1/x| \leqslant 2\}, \qquad F := \{x^2 - 4x : x \in \,]-1,2[\,\}.$$

Donnez, s'ils existent, $\sup E$, $\max E$, $\sup F$, $\max F$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ en termes de petit o de la fonction

$$f(x) := \exp\left(\frac{\sin x}{1-3x}\right).$$

Utilisez l'approximation Taylorienne ci-dessus pour calculer la limite :

$$\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{f(x)-(x+1)}{x\cos x - \ln(1+x)}$$

Justifiez en détail vos calculs.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Analyse mathématique I

Examen (8 octobre 2002)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers a et b. Montrez, à partir de la définition « en ε », que $x_n \cdot (y_n - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} a \cdot (b-1)$.

Analyse mathématique I

Examen (8 octobre 2002)

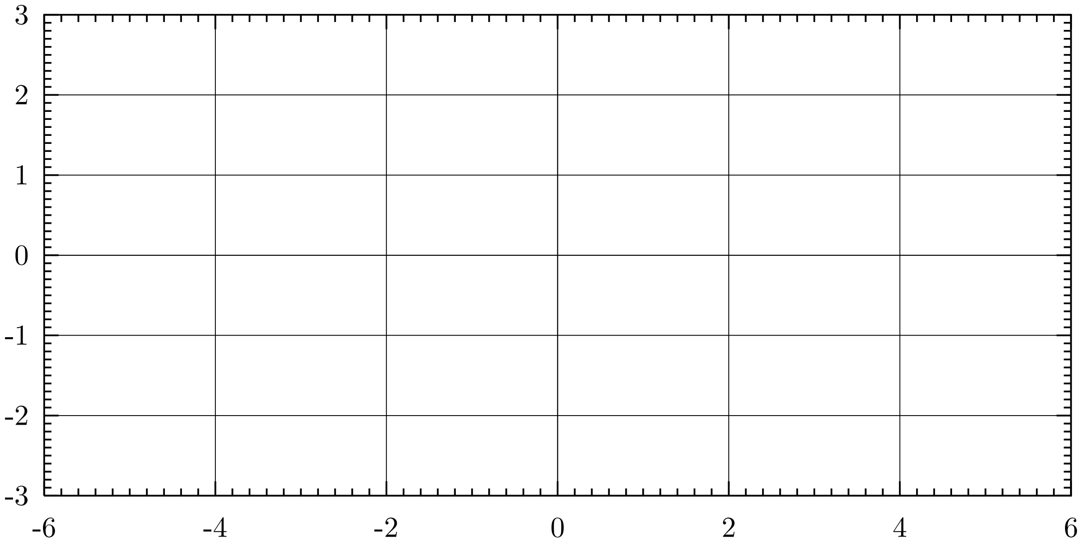
Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

- Représentez f sur le graphique ci-dessous.



- Argumentez brièvement le fait que f soit continue en tout point $x \in \mathbb{R}$.

- Montrez que l'ensemble $E := \{\mathrm{e}^{-x^2} : x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$ est fermé. *Justifiez en détail.*

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite).

- E est-il compact ? *Justifiez.*

Analyse mathématique I

Examen (8 octobre 2002)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Soient f et g les deux fonctions définies par

$$f : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R}^4 : (x,y) \mapsto \left(x^2 - 3x, e^{x-y}, y^3, \frac{x}{y}\right)$$

$$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \big(1, (x_1 - x_3)^2, x_2 \cdot x_4\big).$$

Calculez $\partial(g \circ f)(a,a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ où $a \in \mathbb{R}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Analyse mathématique I

Examen (8 octobre 2002)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : ______

Question 8. Indiquez, en cochant la case adéquate, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses (a et b sont deux nombres réels arbitraires). *Toute mauvaise réponse sera sanctionnée par une cote négative.*

Vrai : ☐ Faux : ☐ $\sqrt{a^2} = a$

Vrai : ☐ Faux : ☐ $a^2 \leqslant |a|^2$

Vrai : ☐ Faux : ☐ si $a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$

Vrai : ☐ Faux : ☐ si $a^2 \leqslant b^2$, alors $a \leqslant b$

Vrai : ☐ Faux : ☐ $|a| \leqslant b$ si et seulement si $-b \leqslant a$ et $a \leqslant b$

Vrai : ☐ Faux : ☐ $1/a \leqslant 1$

Vrai : ☐ Faux : ☐ si $a \in \,]0,1]$, alors $1/a \leqslant 1$

Vrai : ☐ Faux : ☐ $\mathbb{R}$ est un ensemble borné.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^2$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une fonction est dérivable alors elle est continue.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Une équation cartésienne de la tangente au graphe d'une fonction f en un point $\big(x_0, f(x_0)\big)$ s'écrit $f(x) = f(x_0) + \partial f(x_0)(x - x_0)$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{|x|}{x} = 1$ grâce à la règle de l'Hospital.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall y \in \big[f(a), f(b)\big],\ \exists x \in [a,b],\ f(x) = y.$$

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\forall x \in [a,b],\ \exists \rho > 0,\ \exists K > 0,\ \forall y \in [a,b],\ |y - x| \leqslant \rho \Rightarrow |f(y)| \leqslant K.$$

Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue.

Vrai : ☐ Faux : ☐ La somme de deux fonctions continues est une fonction continue.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n) \subseteq [-1,2]$, alors il existe une sous-suite (y_n) de (x_n) et $y^\star \in \mathbb{R}$ telle que $y_n \to y^\star$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Les seules solutions $u \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de $\partial^{n+1} u = 0$ sont les polynômes de degré au plus n.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la dérivée d'une fonction est nulle en un point, c'est que cette fonction atteint son maximum ou son minimum.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Le suprémum d'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ appartient à cet ensemble si et seulement si E est fermé.