Analyse mathématique I

Examen (10 janvier 2003)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Étudiez la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ définie par :

$$x_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}}.$$

Justifiez en détail. Toute affirmation non vue au cours doit être démontrée.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2. Montrez, en utilisant la définition en termes de ε, que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$y_n := -2x_n + 3$$

converge vers -1.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Étudiez la convergence de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$v_1 = 2, \qquad v_{n+1} = 3 - \frac{1}{v_n} \quad \text{si } n \geqslant 1.$$

Calculez sa limite, si elle existe.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Soit l'ensemble

$$E := \left\{2 - \frac{3^n}{(n+1)!} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Calculez, s'ils existent, $\inf E$, $\min E$, $\sup E$, $\max E$. *Toutes vos réponses doivent être justifiées.*

Analyse mathématique I

Examen (10 janvier 2003)

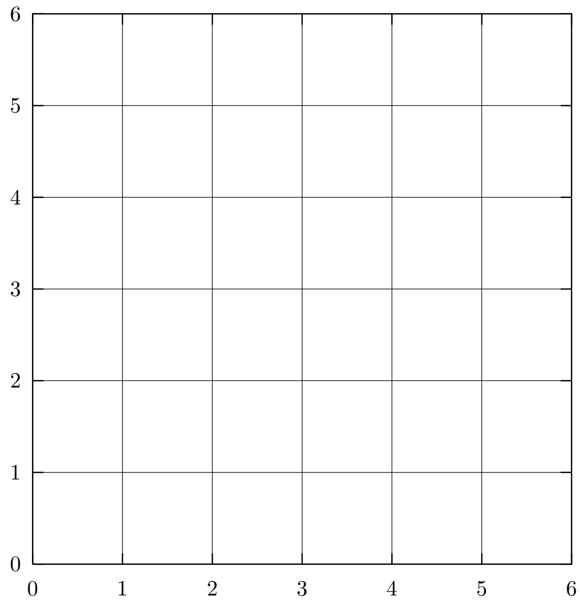
Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Notons E la fonction définie par

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

- Calculez $E(2{,}34)$, $E(9/2)$, $E(0{,}18)$ et $E(4)$.

- Représentez la fonction E sur l'intervalle $[0,6]$.



- Définissez, de deux manières équivalentes, le fait que $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

- Montrez que $\lim_{x\to 2} E(x)$ n'existe pas.

Analyse mathématique I

Examen (10 janvier 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Écrivez avec des quantificateurs les propriétés suivantes. (Il ne doit plus rester un seul mot de français.)

- l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas borné supérieurement :

- $(x_n)_{n \in I}$ ne converge pas :

- $(x_n)_{n \in I}$ converge vers $-\infty$:

- $(x_n)_{n \in I}$ n'est pas bornée :

- $(x_n)_{n \in I}$ est constante pour n assez grand :

- La fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante :

- $a \in \mathbb{R}$ est le suprémum de $A \subseteq \mathbb{R}$:

- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue :

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple. *Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.*

Vrai : ☐ Faux : ☐ Le maximum d'un ensemble fini existe toujours.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite de rationnels converge dans $\mathbb{R}$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite est croissante, alors elle converge au sens large.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ est borné si et seulement si il est borné supérieurement et inférieurement.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7 (suite).

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge, alors elle est telle que $|x_n - x_{n+1}| \to 0$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Il est possible que le suprémum d'un ensemble A appartienne à A.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite convergente est bornée.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite bornée est convergente.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7 (suite).

Vrai : ☐ Faux : ☐ La somme $f+g$ de deux fonctions non-continues f et g est discontinue.

Vrai : ☐ Faux : ☐ La somme $f+g$ d'une fonction continue f et d'une fonction discontinue g est nécessairement discontinue.

Question 8. Soient f et g deux fonctions continues d'un intervalle $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Prouvez que si $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$, alors il existe un $\xi \in]a,b[$ tel que $f(\xi) = g(\xi)$. *Énoncez tous les résultats du cours que vous utilisez.*

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite de nombres réels. Considérons les trois propositions suivantes

$$(x_n) \text{ converge : } \exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

$$\exists b \in \mathbb{R},\ \forall \zeta \geqslant 0,\ \exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant m_0,\ |x_m - b| \leqslant \zeta \tag{2}$$

$$(x_n) \text{ est ultimement constante : } \exists c \in \mathbb{R},\ \exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant p_0,\ x_p = c \tag{3}$$

Prouvez que $(1) \Leftarrow (2) \Leftrightarrow (3)$. Trouvez un contre exemple qui montre que $(1) \not\Rightarrow (2)$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (10 janvier 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_n := \left(\frac{1}{\lambda - 1}\right)^n.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de λ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle et quelle est alors sa limite ? Justifiez en détail.